

# **Physik I, Experimentalphysik**

**U. Platt WS 2004/05**

**Mechanik starrer und deformierbarer Körper**

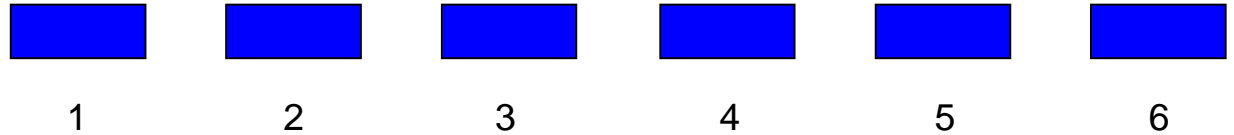
**D. Mechanik starrer Körper**

# Drehbewegungen

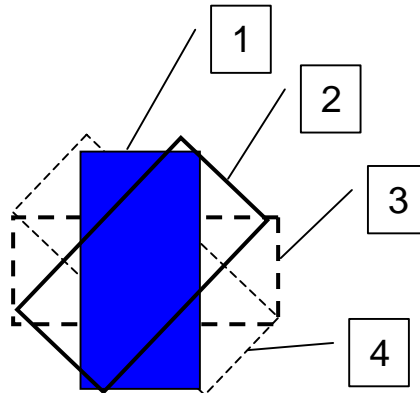
Bisher: Mechanik der Massepunkte 3 Freiheitsgrade (3 Ortskoordinaten)

Jetzt: ausgedehnte Körper 6 Freiheitsgrade (3 Ortskoordinaten + **3 Drehwinkel**)

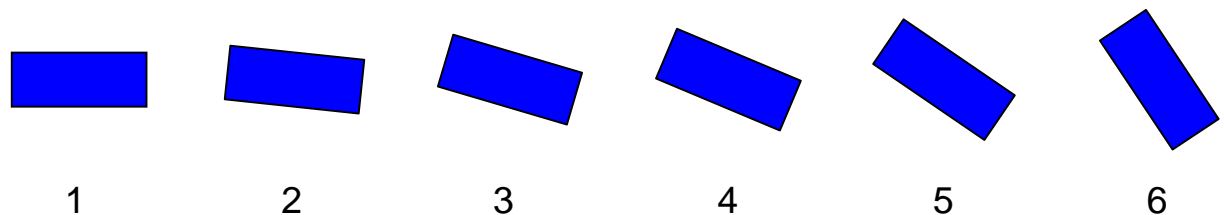
Reine Translation



Reine Rotation



Translation Rotation

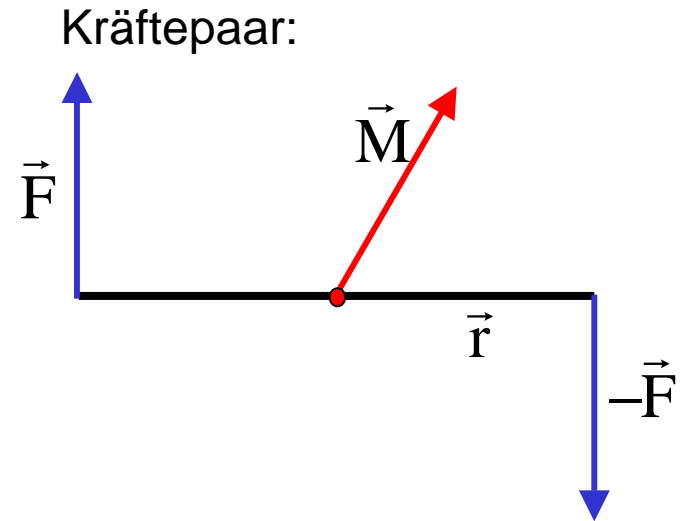


# Drehmoment

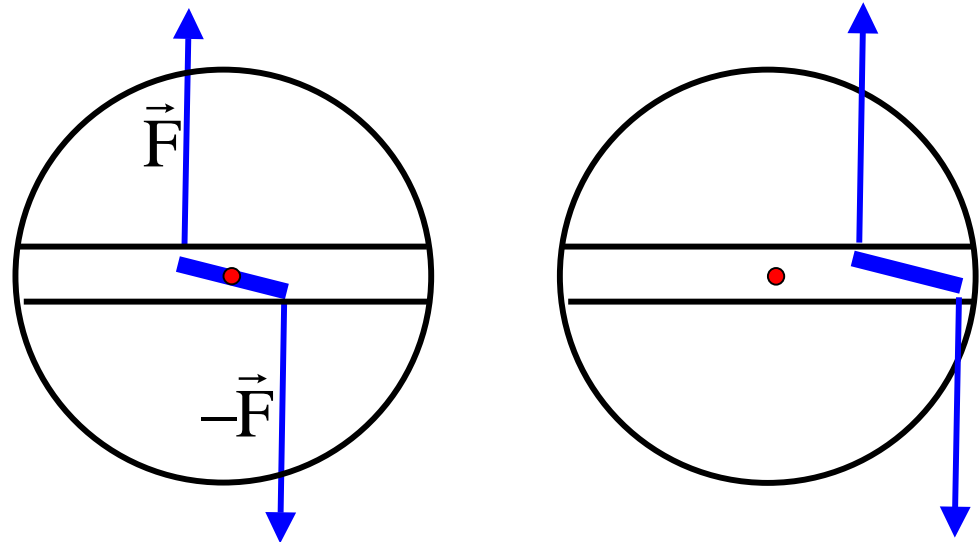
Drehmoment = Hebelarm  $\times$  Kraft

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

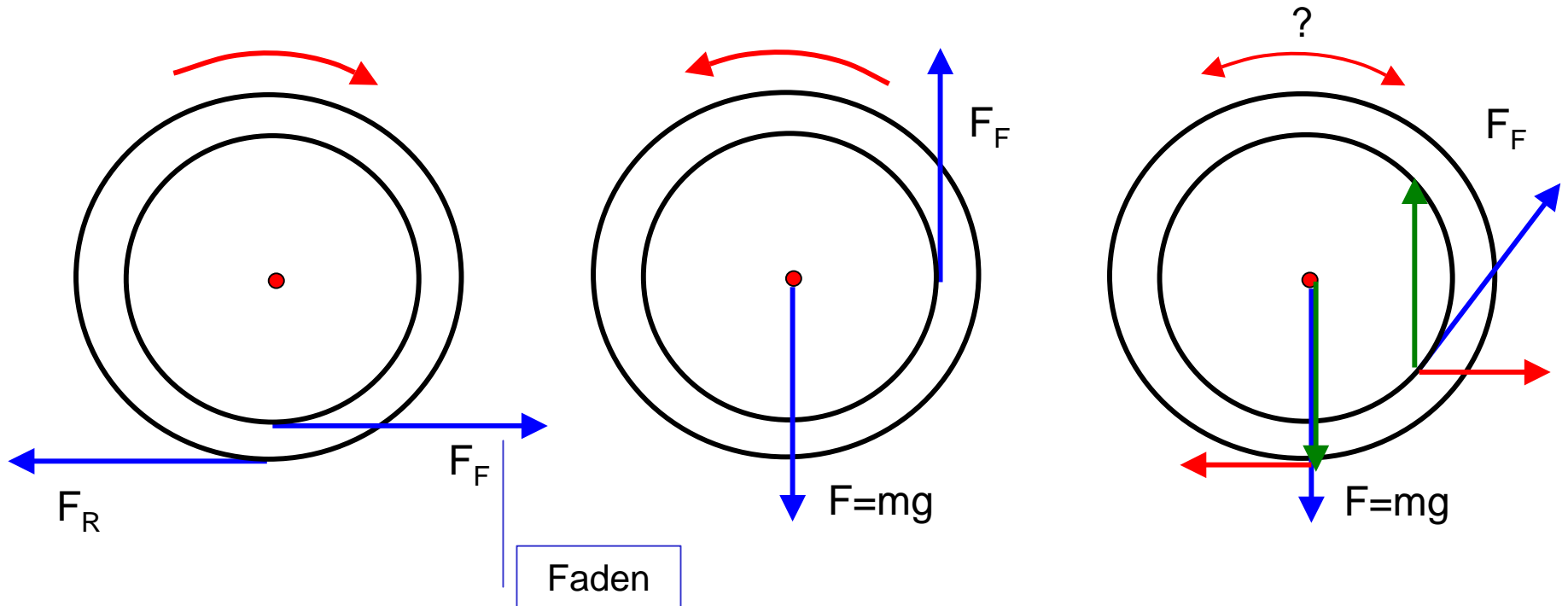
$$M = |\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \sin \vartheta = r \cdot F_{\perp}$$



Schraubenzieher:

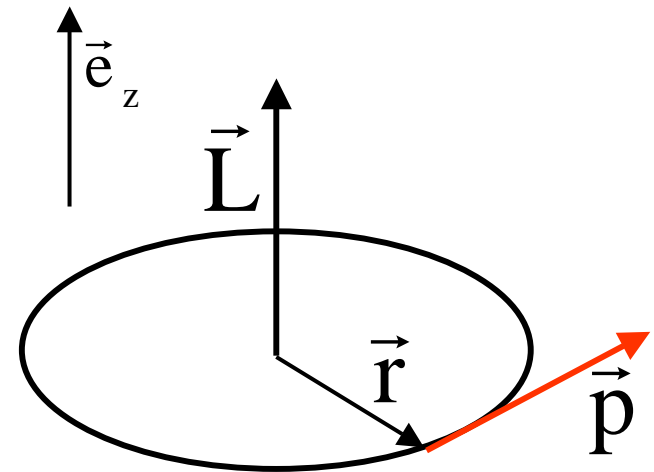


# Die „Garnrolle“



# Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



Im abgeschlossenen System ist der Drehimpuls konstant

$$\vec{L} = \text{const.}, \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Drehimpuls - Drehmoment:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \stackrel{\substack{\underbrace{\vec{r} = \text{const.}} \\ \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}}}{=} \left( \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{p} \right) \stackrel{\substack{\underbrace{\vec{r} = \text{const.}} \\ \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}}}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Drehbewegung - Linearbewegung

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

# Trägheitsmoment

Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_\varphi = \omega r \cdot \vec{e}_\varphi = \omega r \cdot \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \omega \vec{e}_z \times r \vec{e}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{r^2} \vec{r} \times \vec{v}$$

Umlaufender Massepunkt:

$$\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{p} = \vec{r} \cdot (m\vec{v}) \stackrel{\substack{\vec{v} \\ v=r\omega}}{=} \vec{r} \cdot m \cdot r\omega = mr^2\omega = \Theta\omega$$

Trägheitsmoment:

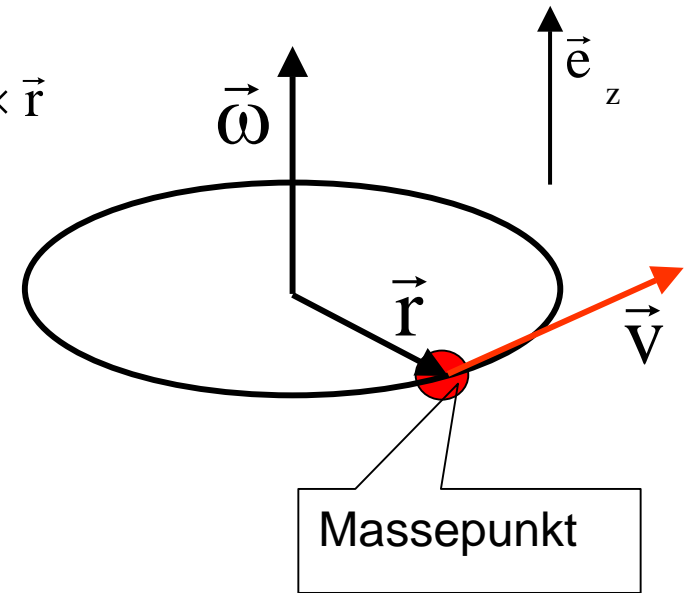
$$\Theta = mr^2$$

Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit:

$$\vec{M} = \Theta \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \Theta \vec{\beta}$$

Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit:

$$\vec{L} = \Theta \vec{\omega}$$



Linearbewegung:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}$$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

# Drehimpuls: Raumstation

Zentrifugalbeschleunigung:

$$a_z = \omega^2 r$$

z.B.

$$\omega = 0.3 \text{ s}^{-1}, r = 100\text{m}$$

$$\rightarrow a_z \approx 9 \text{ ms}^{-2}$$

$$\text{Drehzahl also } \omega/2\pi \approx 0.05 \text{ s}^{-1}$$

$$\rightarrow 1 \text{ Umdrehung in } 20 \text{ s}$$



Wernher v. Braun

# Größen der Kreis- bzw. linearen Bewegung

Rotation		Translation	
Winkel	$\alpha$	Strecke	$x$
Winkelgeschwindigkeit	$\omega$	Geschwindigkeit	$v$
Drehmoment	$M$	Kraft	$F$
Drehimpuls	$L$	Impuls	$p$
Trägheitsmoment	$\Theta$	Masse	$m$
Rotationsenergie	$E_{\text{rot}}$	Translationsenergie	$E_{\text{trans}}$

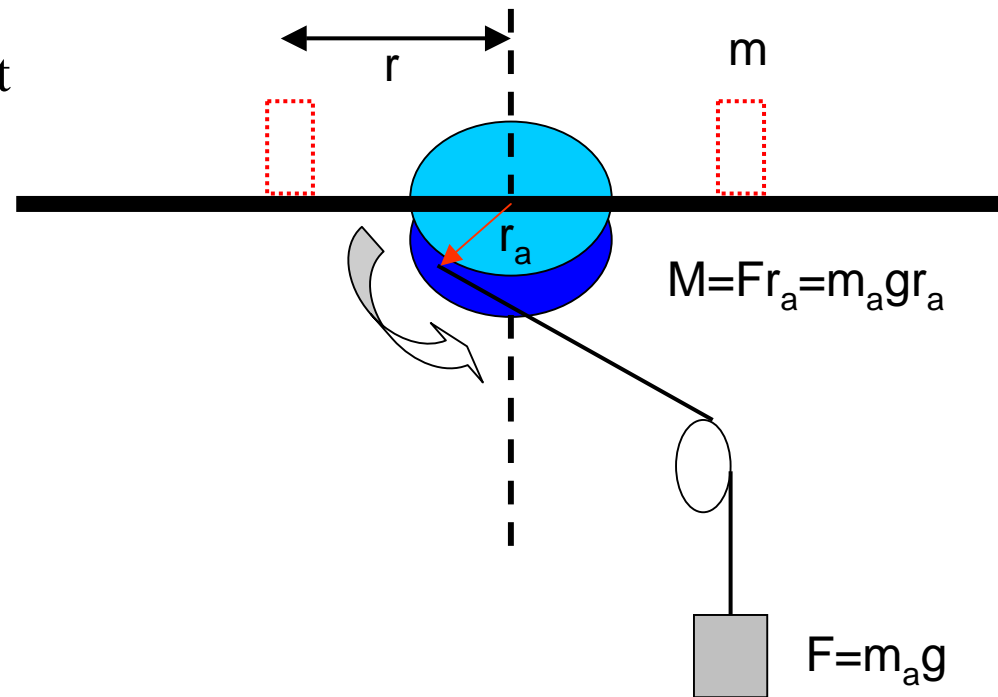
# Drehmoment, Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment

$$M = \Theta \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \frac{M}{\Theta} dt \Rightarrow \omega = \frac{M}{\Theta} t$$

$$d\alpha = \omega dt = \frac{M}{\Theta} t \cdot dt \Rightarrow$$

$$\alpha = \int \frac{M}{\Theta} t \cdot dt = \frac{M}{2\Theta} t^2$$

$$t_{\alpha=2\pi}^2 = \frac{4\pi\Theta}{M} \Rightarrow \Theta = \frac{M}{4\pi} t^2$$



Versuch:

Anordnung	t	t <sup>2</sup>	t <sub>2</sub> - t <sub>0</sub> <sup>2</sup>
Nur Balken	1.74 (=t <sub>0</sub> )	3.03	0
m=1, r=1	3.33	11.09	8.06
m=1, r=2	5.96	35.52	32.49
m=4, r=1	5.96	35.52	32.49

# Trägheitsmoment beliebiger Körper

Lineare Schwingung (zur Erinnerung):

$$F = -kx \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

$$\Rightarrow x(t) = \cos(\omega t) \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Analoge Rotationsschwingung nach "Übersetzungstabelle,,:

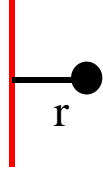
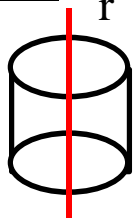
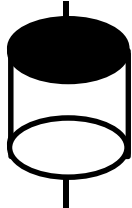
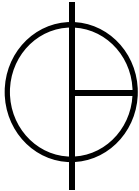
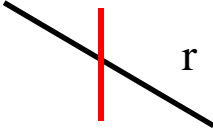
$$M = -k_\alpha \alpha \Rightarrow \Theta \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -k_\alpha \alpha \Rightarrow \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{k_\alpha}{\Theta} \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \cos(\omega_R t) \text{ mit } \omega_R = \sqrt{\frac{k_\alpha}{\Theta}} \Rightarrow \Theta = \frac{k_\alpha}{\omega_R^2} \stackrel{\omega = \frac{2\pi}{T}}{=} \frac{k_\alpha}{4\pi^2} T_s^2$$

Versuch:

Körper	$T_s$	$T_s^2$	$T_s^2 / T_0^2$
Alu Platte 2 mm	2.43 (=T <sub>0</sub> )	5.90	1
Alu Platte 8 mm (2+6 mm)	4.86	23.62	4.003
Messing Ring	6.30	39.69	6.73

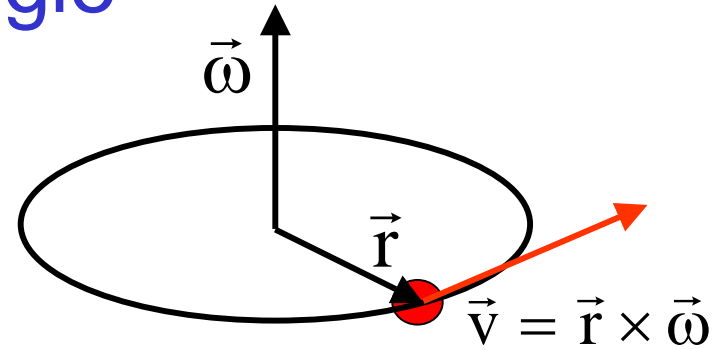
# Trägheitsmomente einfacher Körper

Körper	Trägheitsmoment	
Massenpunkt	$\Theta = mr^2$	
(unendlich) dünnwandiger Hohlzylinder	$\Theta = mr^2$	
(massiver) Zylinder	$\Theta = \frac{1}{2} mr^2$	
Kugel	$\Theta = \frac{2}{5} mr^2$	
(unendlich dünner) Stab	$\Theta = \frac{1}{3} mr^2$	

# Rotationsenergie

Energie eines umlaufenden Massepunktes:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \underbrace{m r^2}_{\Theta} \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$



Beliebig geformter Körper: Summation über Massepunkte bzw. Energie:

$$E = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E = \frac{\vec{L}^2}{2\Theta}$$

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

Translation -  
Rotation

	Translation	Rotation	
	Verknüpfung zwischen beiden		
Wegstück	$d\vec{s}$	$d\vec{\alpha}$	Winkel
	$d\vec{s} = d\vec{\alpha} \times \vec{r}$		
Geschwindigkeit	$\vec{v} = \dot{\vec{s}}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\alpha}}$	Winkelgeschwindigkeit
	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$		
Beschleunigung	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{s}}$	$\vec{\beta} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\alpha}}$	Winkelbeschleunigung
	$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$		
Träge Masse	$m$	$\Theta$	Trägheitsmoment
	$\Theta = \int r^2 dm$		
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$	Drehimpuls
	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$		
Kraft	$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \Theta \cdot \vec{\beta}$	Drehmoment
	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$		
Kinetische Energie	$E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	$E_{\text{Rot}} = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \omega^2$	Rotationsenergie
	$\frac{1}{2} \cdot \sum_i m_i \cdot v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_i m_i \cdot (r_i \cdot \omega)^2$		
Arbeit	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$	$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\alpha}$	Arbeit
	$\vec{F} \cdot (d\vec{\alpha} \times \vec{r}) = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\alpha}$		

# Trägheitsmomente – Steiner'scher Satz

Rotation eines Körpers (Masse  $m$ ) um Achse im Abstand  $s$  vom Schwerpunkt A:

Jeder Punkt des Körpers rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ !

→ betrachten gesamten Körper als Massepunkt A

→ Rotationsenergie des Schwerpunktes  $E_s$ :

$$E_s = \frac{1}{2} m s^2 \omega^2$$

Dazu kommt Rotationsenergie  $E_0$  aufgrund der Rotation um (parallele) Achse durch den Schwerpunkt:

$$E_0 = \frac{1}{2} \Theta_0 \omega^2$$

Insgesamt:

$$E_{\text{ges}} = \frac{1}{2} m s^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \Theta_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \underbrace{(m s^2 + \Theta_0)}_{\Theta_{\text{ges}}} \omega^2$$

**Bei der Rotation eines Körpers um eine beliebige Achse im Abstand  $s$  vom Schwerpunkt ergibt sich das Trägheitsmoment also als Summe des Trägheitsmomentes durch eine parallele Achse durch den Schwerpunkt plus den Term  $ms^2$ :**

$$\Theta_{\text{ges}} = m s^2 + \Theta_0$$

# Trägheitstensor

Im allgemeinen sind Drehachse  $\vec{\omega}$  und Drehimpulsachse  $\vec{L}$  nicht kollinear

Dann ist der Drehimpuls gegeben durch:

$$\vec{L} = \hat{\Theta} \vec{\omega}$$



Trägheitstensor

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{yx} & \Theta_{zx} \\ \Theta_{xy} & \Theta_{yy} & \Theta_{zy} \\ \Theta_{xz} & \Theta_{yz} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}}_{\hat{\Theta}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} \omega_x + \Theta_{yx} \omega_x + \Theta_{zx} \omega_x \\ \Theta_{xy} \omega_y + \Theta_{yy} \omega_y + \Theta_{zy} \omega_y \\ \Theta_{xz} \omega_z + \Theta_{yz} \omega_z + \Theta_{zz} \omega_z \end{pmatrix}$$

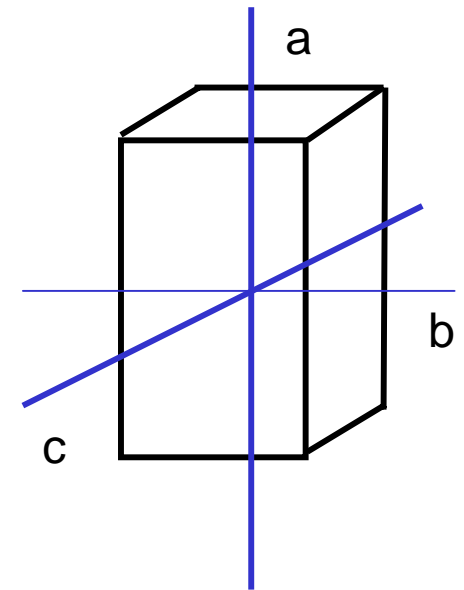
# Hauptachsen – „Freie Achsen“

Für jeden beliebigen Körper gibt es drei aufeinander senkrecht stehende "Hauptachsen"  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  durch den Schwerpunkt S um die der Körper ohne "Unwucht" gedreht werden kann, da Drehachse und Drehimpulsachse dann in die gleiche Richtung zeigen.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}_a \\ \mathbf{L}_b \\ \mathbf{L}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_a & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_b & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_a \\ \omega_b \\ \omega_c \end{pmatrix}$$

Übliche Bezeichnung:

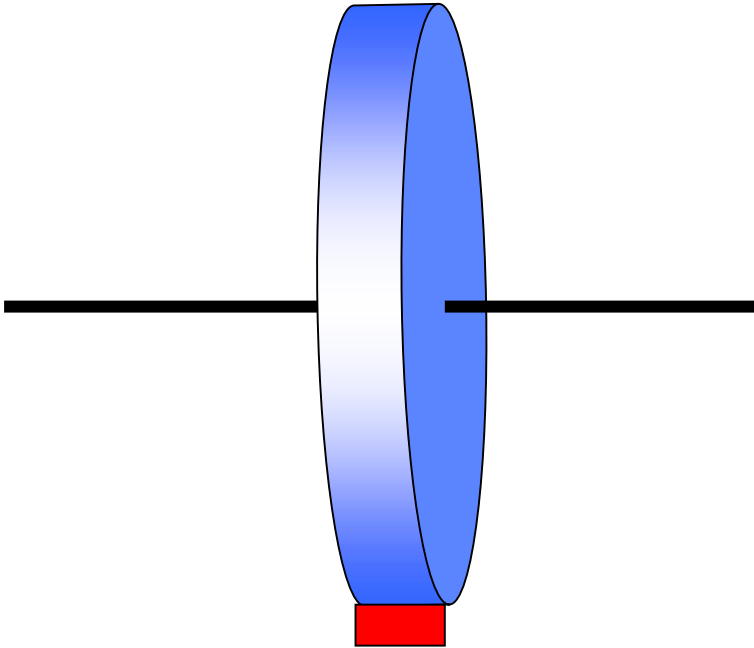
$$\underbrace{\Theta_a}_{\text{stabil}} < \underbrace{\Theta_b}_{\text{instabil}} < \underbrace{\Theta_c}_{\text{stabil}}$$



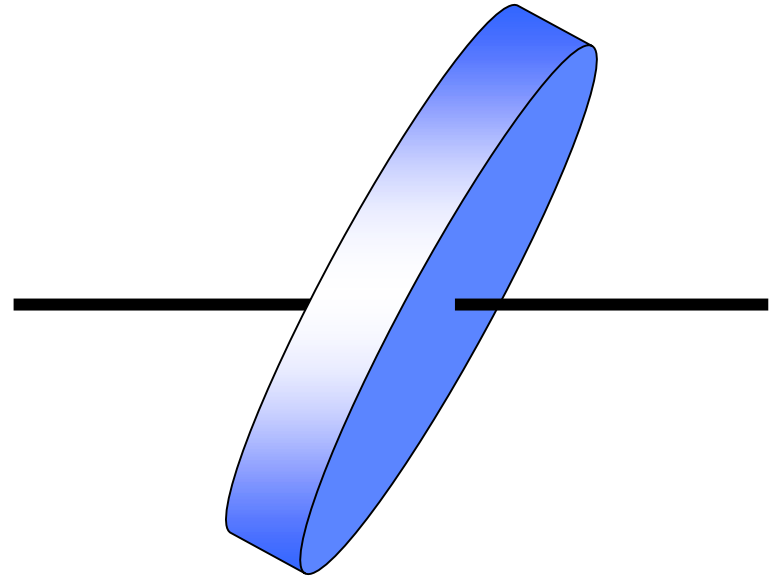
Die Trägheitsmomente bezüglich anderer Rotationsachsen durch S werden dann durch das "Trägheitsellipsoid" bestimmt.

# Unwucht

Statisch:



Dynamisch:



# Schiefe Ebene

Rollbedingung:

$$v = \omega r$$

Drehmoment

( $m$  = Masse des Körpers):

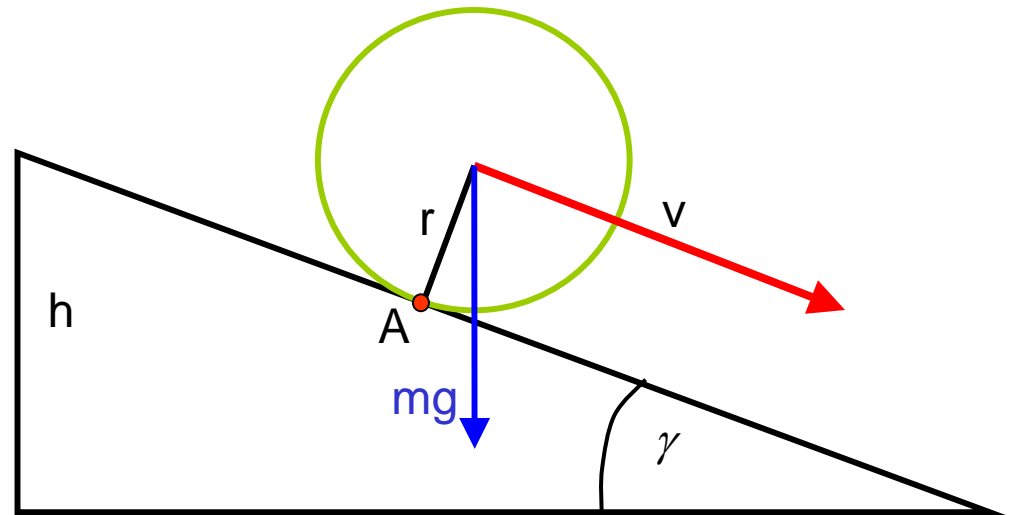
$$M = mgr \sin \gamma$$

Drehung um Auflagepunkt:

$$M = mgr \sin \gamma = (\Theta_s + mr^2) \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{mit } a = \frac{d^2s}{dt^2} = r \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{mgr \sin \gamma}{\Theta_s + mr^2} = \frac{mgr^2 \sin \gamma}{\Theta_s + mr^2} = \frac{g \sin \gamma}{1 + \frac{\Theta_s}{mr^2}}$$



# Kreiselkraftwerk?

United States Patent [19]

US005313850A

[11] Patent Number: 5,313,850

Finvold et al.

[45] Date of Patent: May 24, 1994

- [54] **EARTH/GYRO POWER TRANSDUCER**
- [76] Inventors: **Rodger C. Finvold**, 4126 Quapaw Ave., San Diego, Calif. 921176; **Paul E. Humphrey**, 7665 Central Ave., Lemon Grove, Calif. 92045
- [21] Appl. No.: 872,513
- [22] Filed: Sep. 8, 1992
- [51] Int. Cl.<sup>3</sup> ..... G01C 19/18; G01C 19/00
- [52] U.S. Cl. .... 74/5.9; 74/5 R; 290/1 R
- [58] Field of Search ..... 74/5.22, 5.2, 5.6 D, 74/5.9, 5 R, 5.34, 5.37, 64; 290/1 R; 322/4, 100
- [56] **References Cited**
- U.S. PATENT DOCUMENTS**
- |           |        |                     |            |
|-----------|--------|---------------------|------------|
| 2,477,194 | 5/1954 | Bishop .....        | 74/5.9 X   |
| 2,487,636 | 5/1959 | LaHue et al. ....   | 74/5.6 D X |
| 2,948,956 | 1/1961 | Agins .....         | 74/5.9     |
| 3,309,931 | 3/1967 | Adams et al. ....   | 74/5.6 D   |
| 3,739,480 | 6/1973 | Hanusek et al. .... | 74/5 R     |
| 3,787,758 | 1/1974 | Ashby et al. ....   | 74/5.6 D X |

Primary Examiner—Rodney H. Bonck  
 Attorney, Agent, or Firm—Ralph S. Branscomb

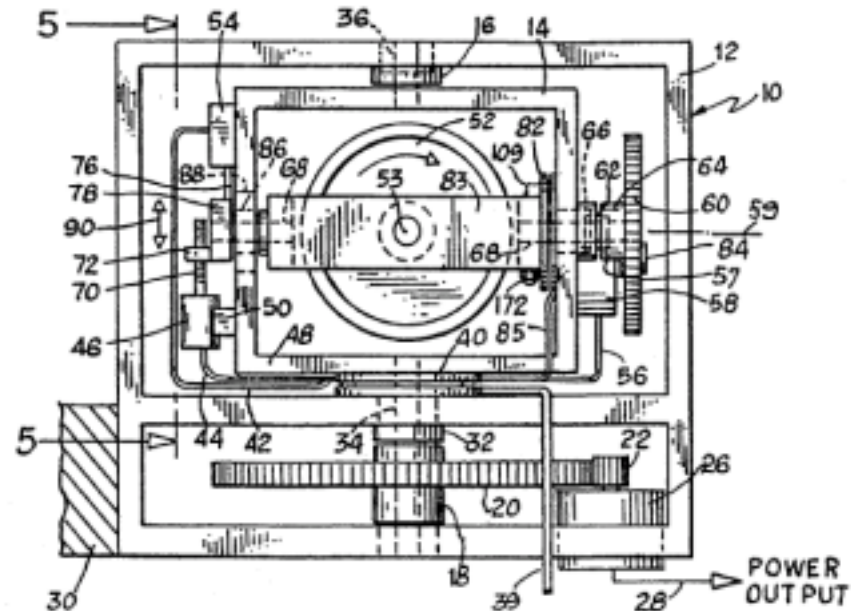
[57] **ABSTRACT**

This specification describes a completely new and different concept, method, mechanization, apparatus con-

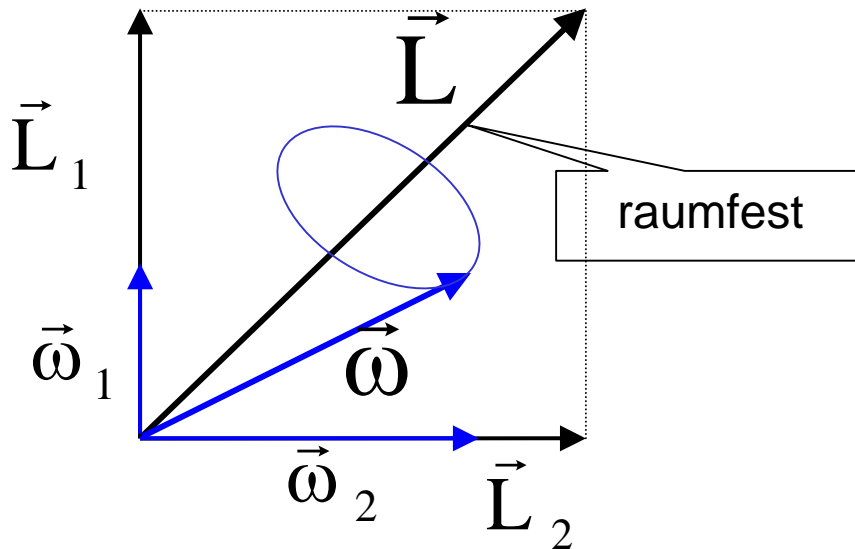
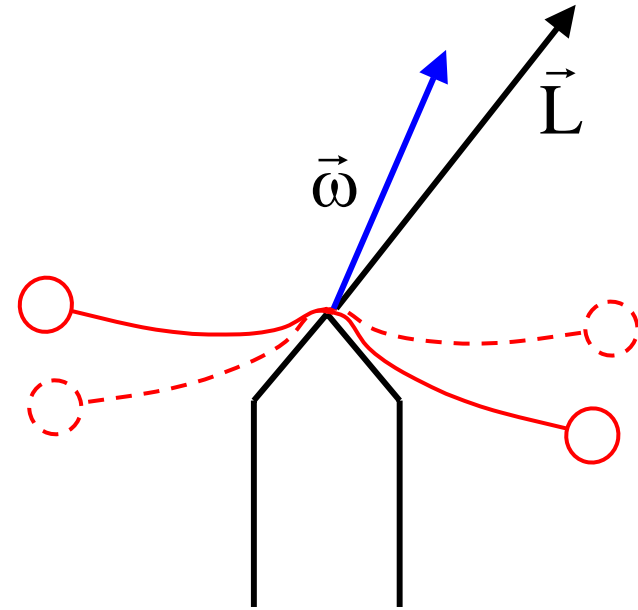
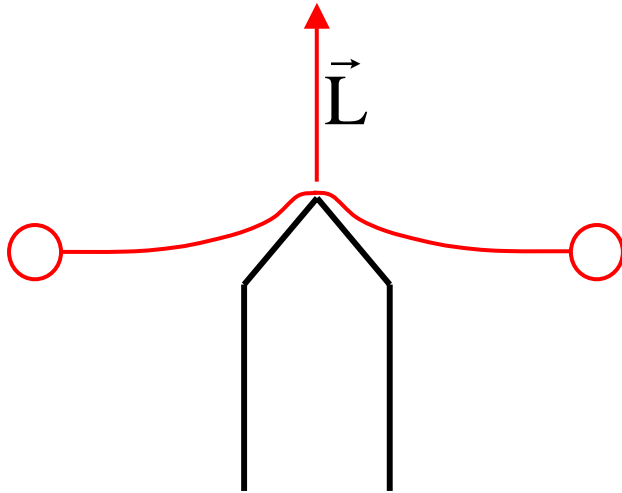
figuration and sequencing procedure for obtaining commercially useful energy and power, namely: the use of a gyroscope to generate output power from the earth's stored inertial rotational (flywheel) energy by fixing the housing of the gyroscope to the earth and using the rotation of the earth relative to the gyroscope's spatially stable rotor/gimbal assembly to rotate the input shaft(s) of a power transducer(s). This provides a power-output stroke over a near 180° precession excursion (near pole-to-pole alignment) until the rotor spin axis of the gyroscope is nearly aligned with the polar axis of the earth. Re-precession torques are then created on the inner gimbal within the gyroscope to re-orient the rotor spin axis vector direction by re-precessing the rotor spin by somewhat more than 180° to the near polar alignment direction required for the resumption of power output in a manner requiring essentially zero energy and power to provide relatively continuous, but intermittent, power output generation along with a multi-unit assembly for producing continuous uninterrupted power output.

An "Advanced Concept" based on rate gyro characteristics showing promise of enhanced performance is included.

27 Claims, 3 Drawing Sheets



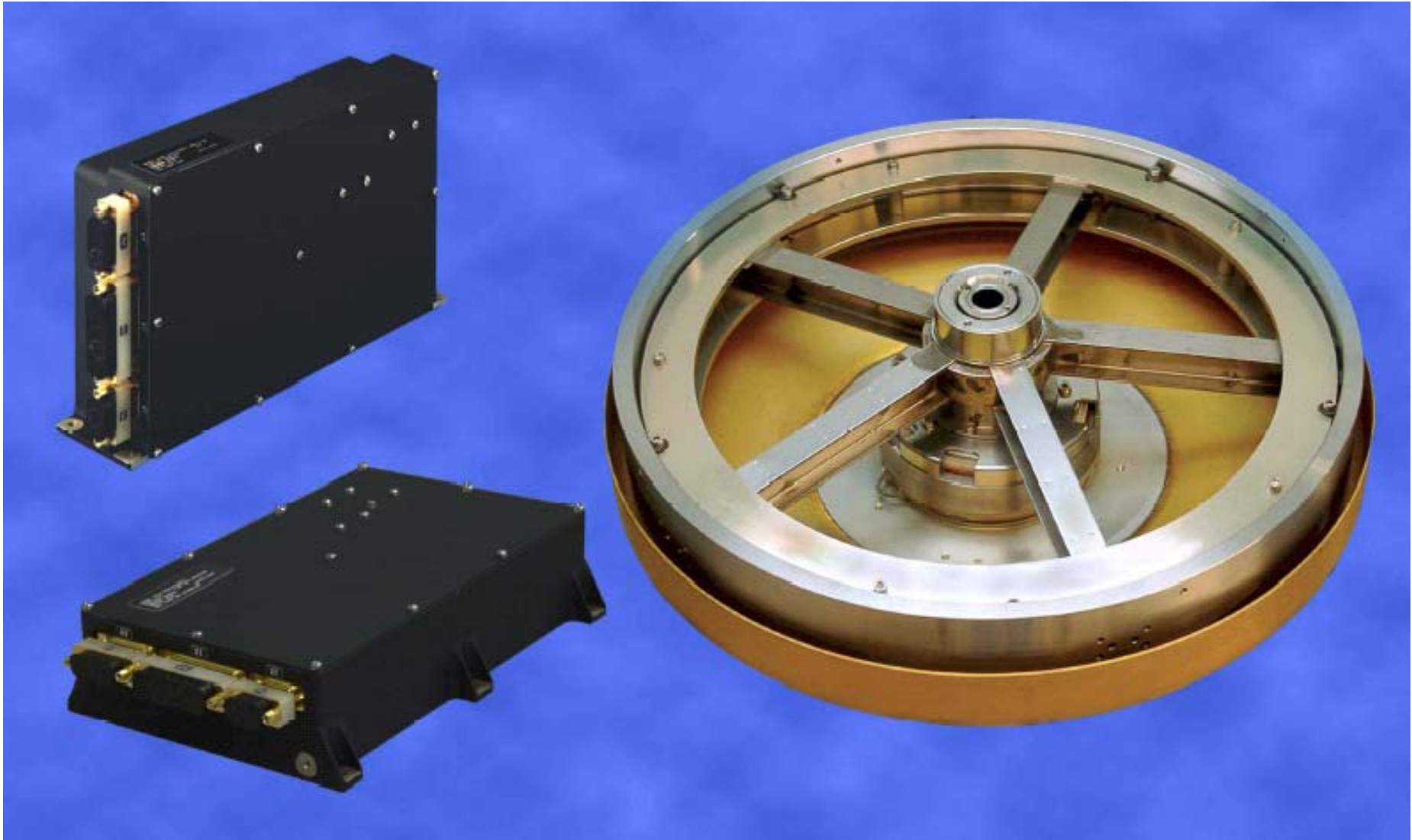
# Kreisel - Nutation



Ohne Beweis:

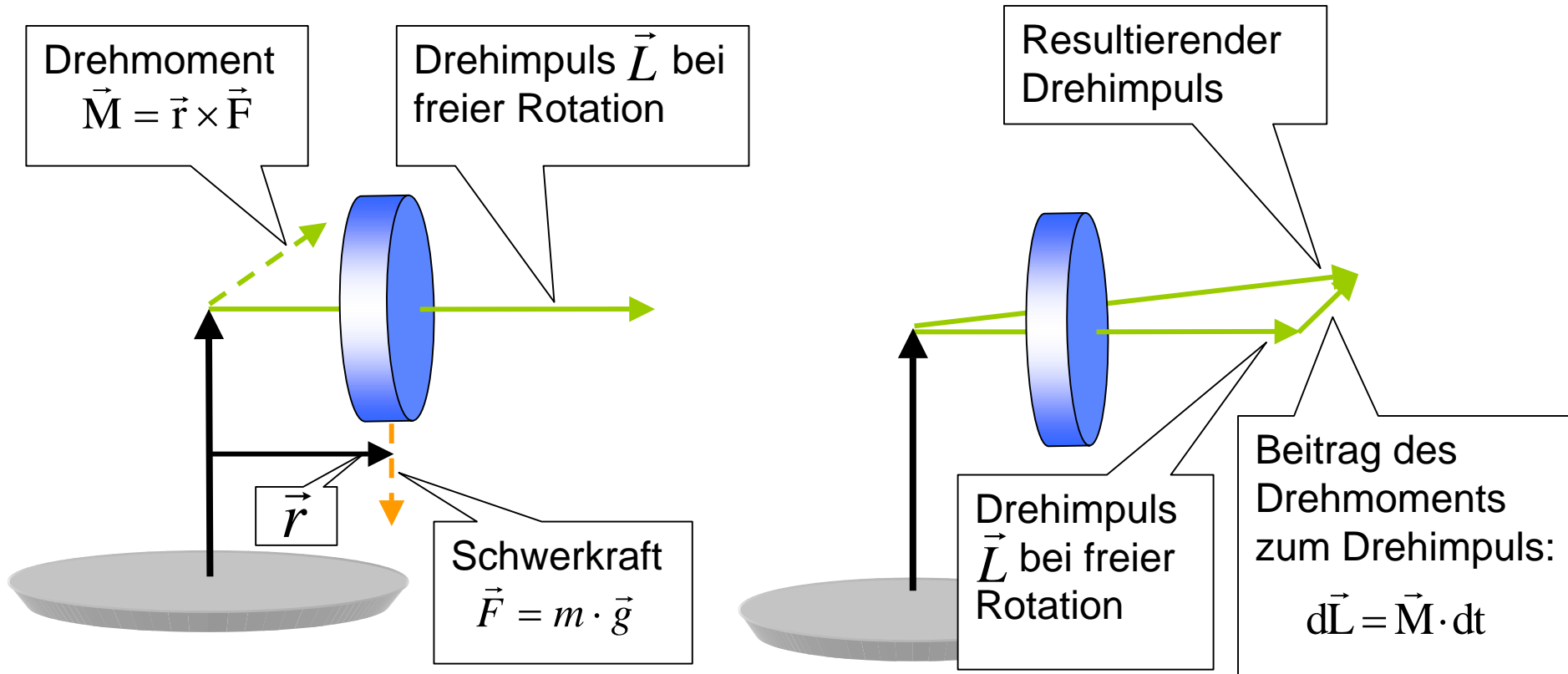
Figurenachse und momentane Drehachse bewegen sich gleichzeitig um eine raumfeste Drehimpulsachse, jede entlang einem Nutationskegel.

# Kreisel zur Lageregelung von Satelliten



Teldix Drallrad,  $d = 345 \text{ mm}$   $L_{\text{max}} = 68 \text{ Nms}$  ( $=\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$ ),  $v_{\text{max}} = \pm 6000 \text{ U/min}$  ( $100 \text{ s}^{-1}$ )

# Kreisel - Präzession



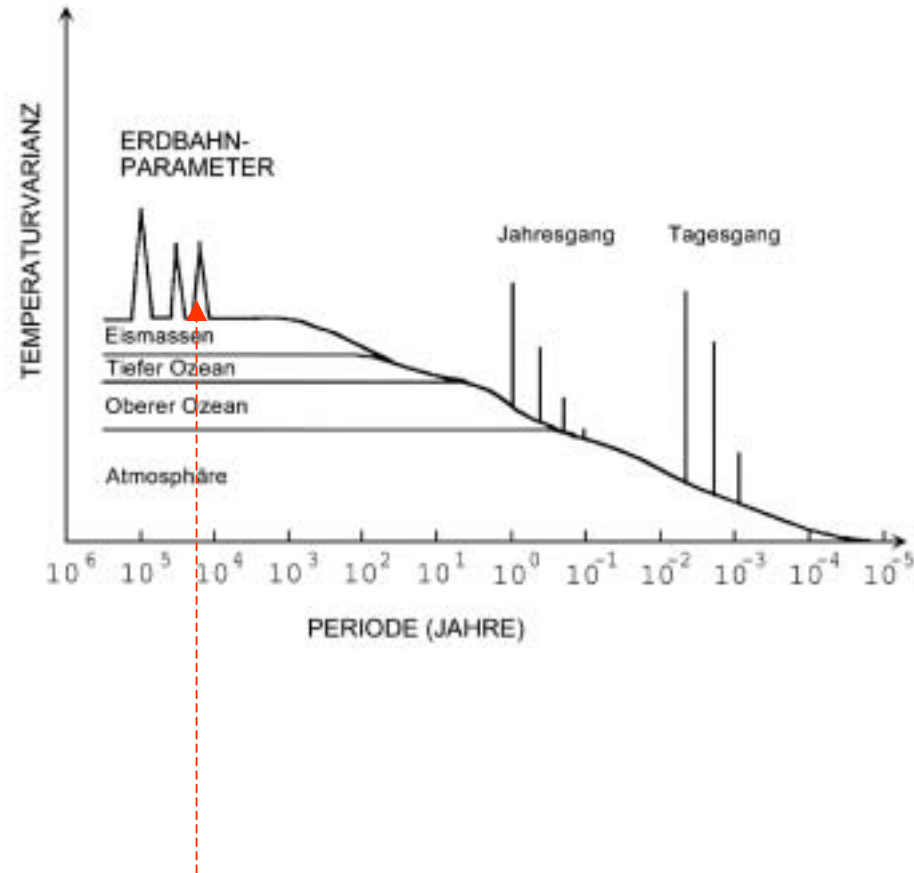
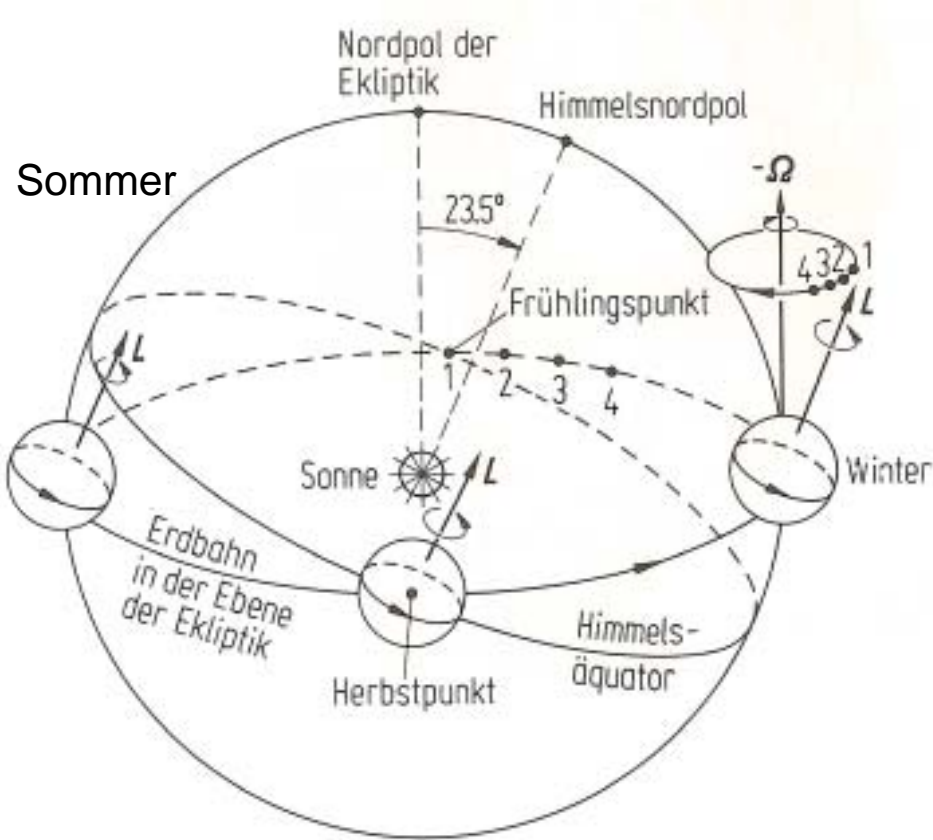
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} \perp \vec{L}$$

Präzessionsfrequenz:

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{mit} \quad d\varphi = \frac{dL}{L}$$

$$\omega_p = \frac{1}{L} \underbrace{\frac{dL}{dt}}_M = \frac{M}{L} = \frac{M}{\Theta \omega}$$

# Die Erde als Kreisel + andere Drehimpulse im Sonnensystem



Präzessionsperiodendauer:

Nutationsperiodendauer:

Änderung der Exzentrizität der Erdbahn:

23 000 Jahre

41 000 Jahre (22.1° – 24.5°)

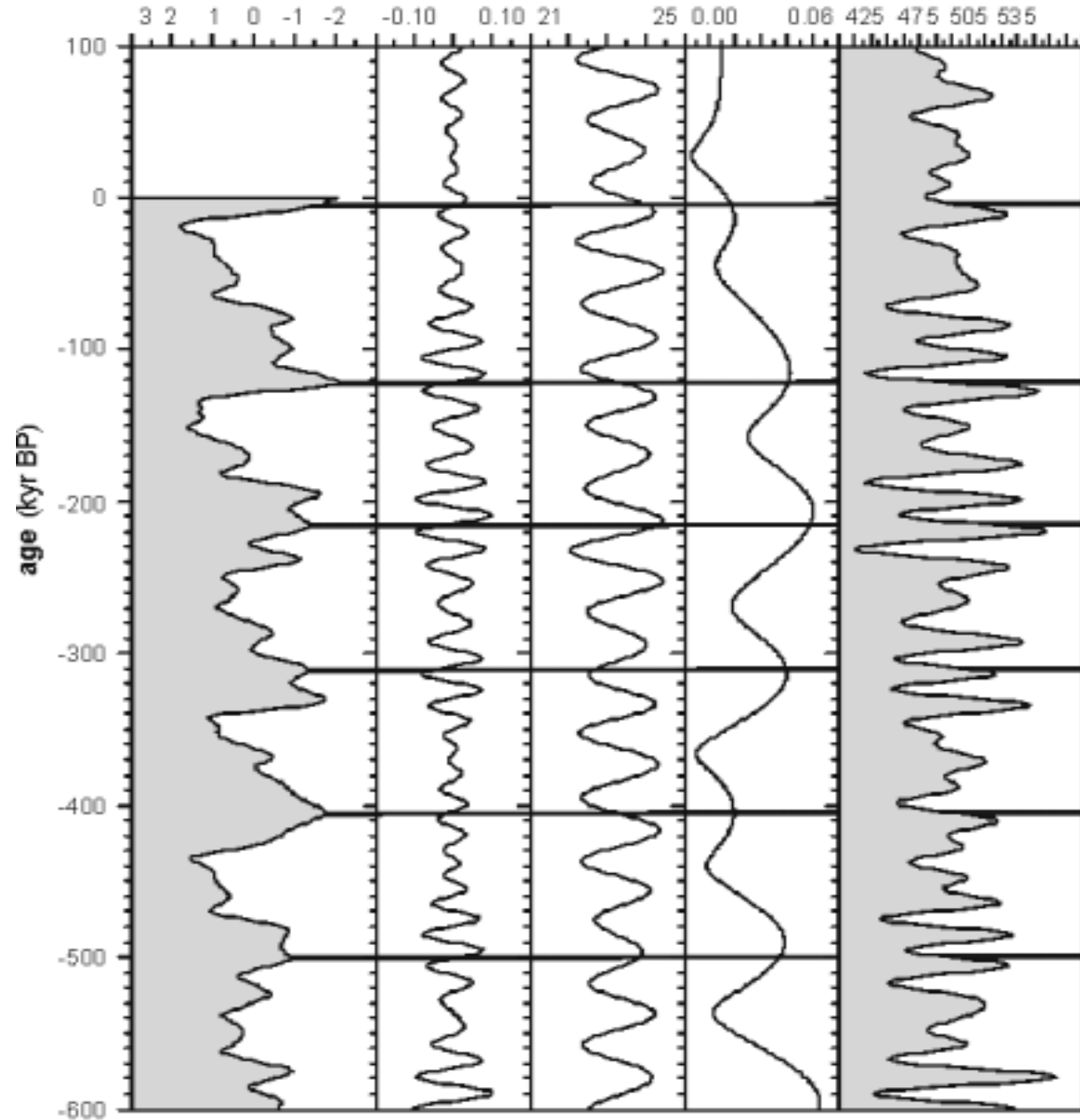
100 000 und 450 000 Jahre

# Eiszeiten und Milankowich

$^{18}\text{O}$

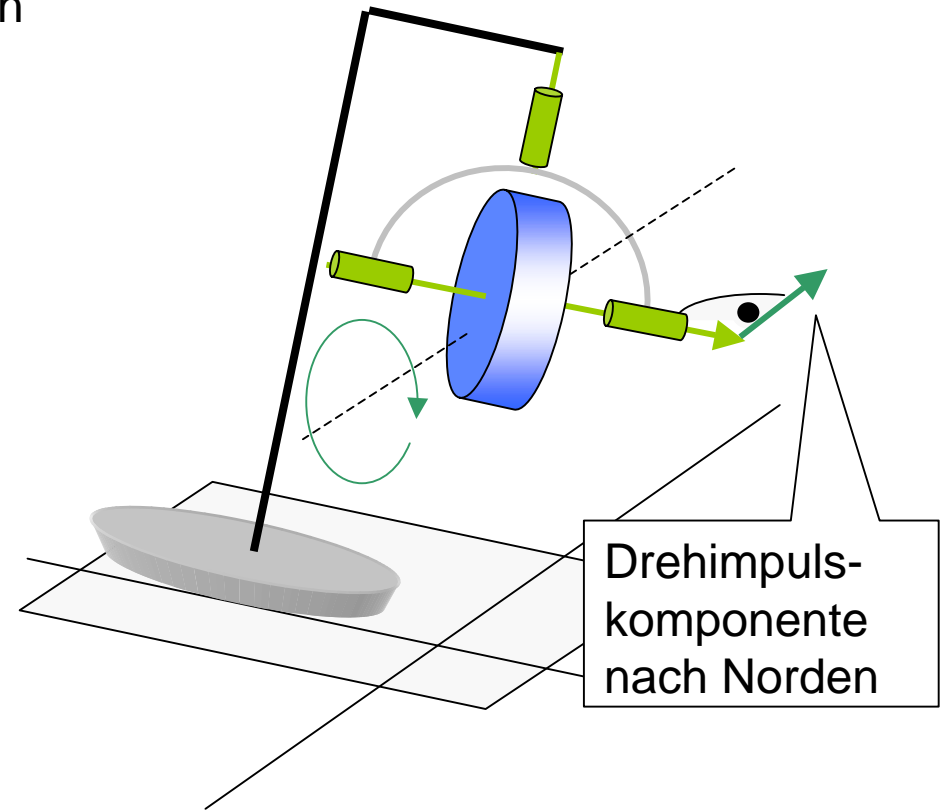
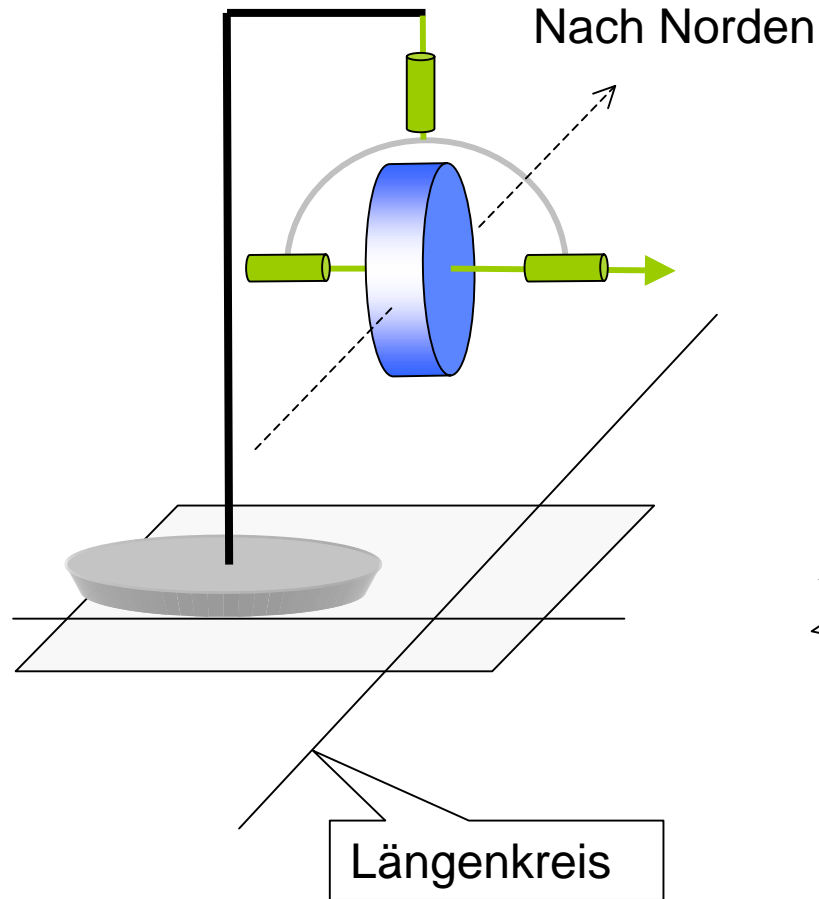
Präzession Neigung Exzentrizität

Sonneneinstrahlung  
60°N, W/m<sup>2</sup>



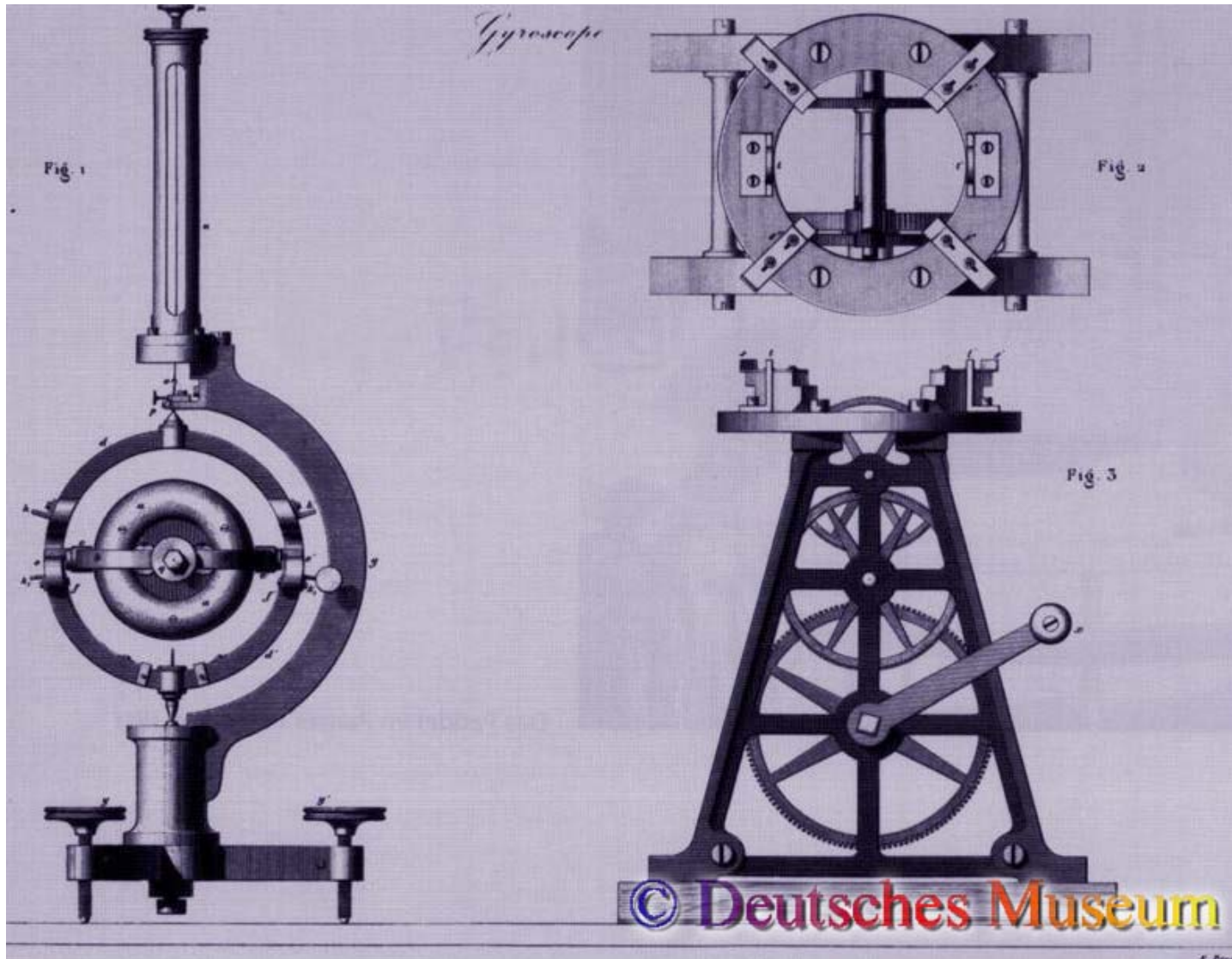
SPECMAP Standard:  $^{18}\text{O}$ -Kurve  
(Imbrie et al., 1984) und orbitale  
Parameter für den Zeitraum  
600 000 Jahre vor Heute bis  
100 000 Jahre in die Zukunft.  
Berechnet nach Berger (1978)

# Kreiselkompass

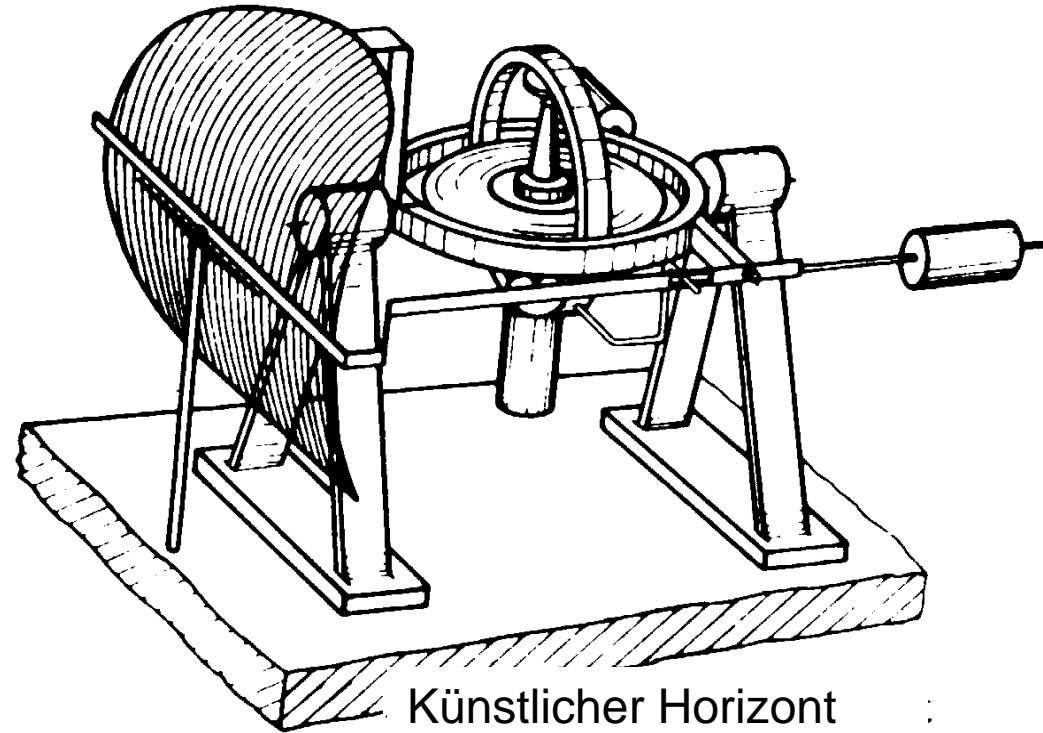
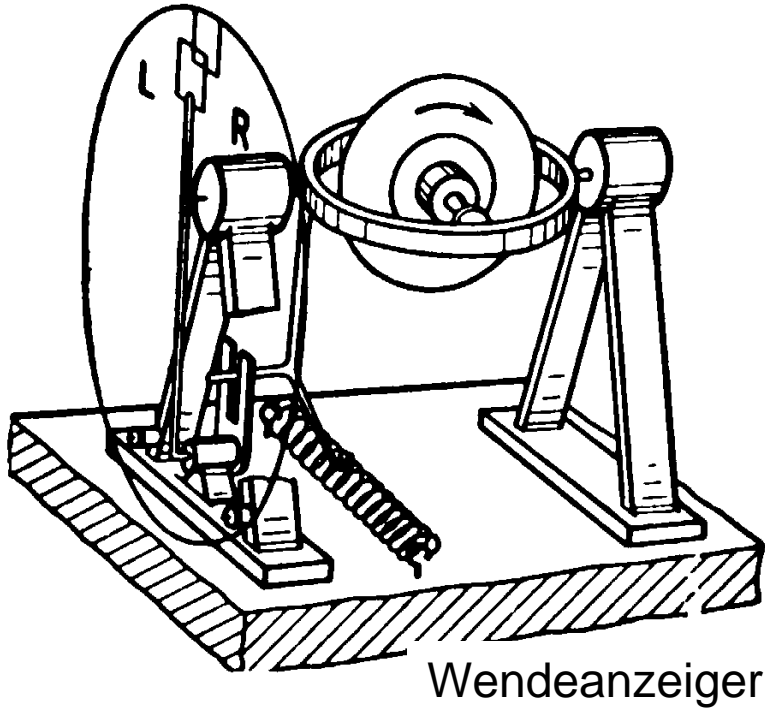


# Das "Gyroskop"

Kreiselkompass (Gyroskop) – Zeichnung von  
Jean Bernhard Leon Foucault (1819-1868)



# Kreisel in Flugzeuginstrumenten



# E. Mechanik deformierbarer Körper

## 1. Reibungskräfte

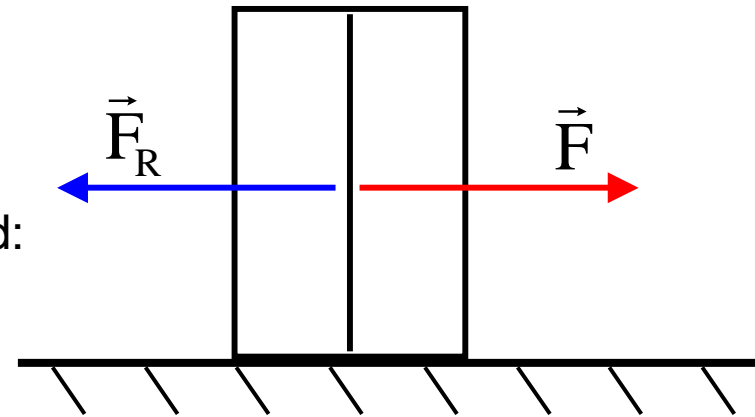
Machen die Physik komplizierter ...

Sind aber äußerst wichtig für uns: Gehen, Fahren, Bremsen ...

a) Haftreibung und Gleitreibung

Schrank rücken ...

Häufig erlebt - Es tut sich nichts, trotz Kraftaufwand:

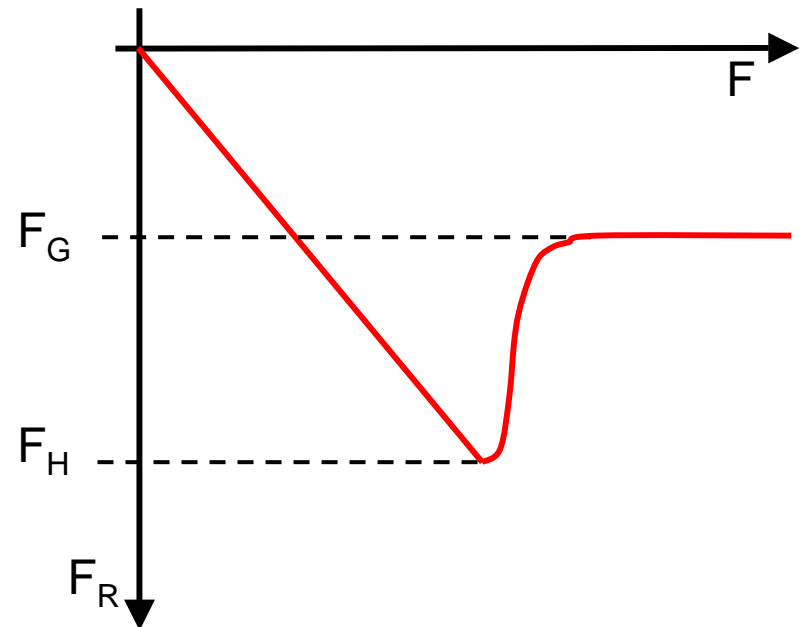


$$\frac{dp}{dt} = F + F_R = 0$$

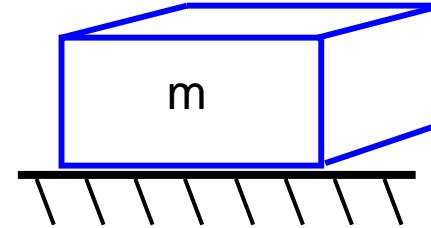
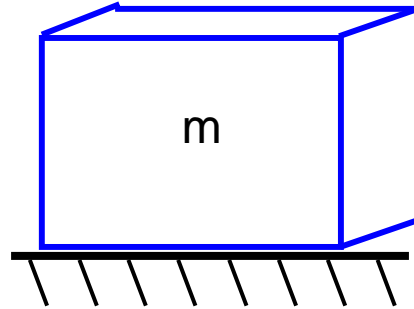
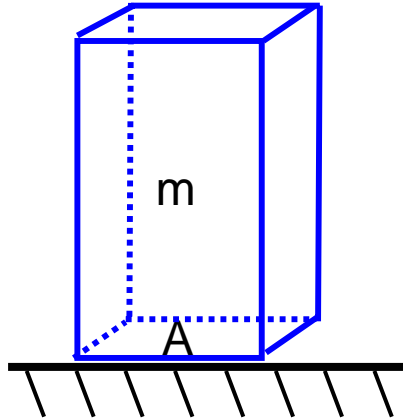
$$F_R = -F \quad F_R: \text{Reibungskraft}$$

$$F_H = \mu_H \cdot F_N \quad \text{Haftreibungskraft}$$

$$F_G = \mu_G \cdot F_N < F_H \quad \text{Gleitreibungskraft}$$



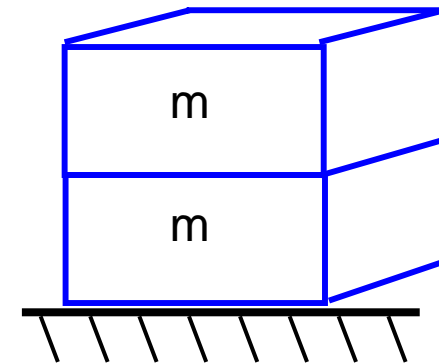
# Reibung eines Körpers unabhängig von der Berührungsfläche



$$F_H = \mu_H \cdot F_N = \frac{F_N}{\underbrace{A}_P} \cdot \mu_H \cdot A$$

$P = \text{Druck (N/m}^2\text{)}$

Materialpaar	Haftreibungskoeffizient	Gleitreibungskoeffizient
	$\mu_H$	$\mu_G$
Stahl - Stahl	0.15	0.05
Kupfer - Gusseisen	1.1	0.3
Glas - Glas	0.9	0.4
Teflon - Teflon	0.04	0.04
Gummi - Beton (trocken)	1.0	0.8
Gummi - Beton (nass)	0.3	0.25
Gummi - Asphalt (trocken)	0.9	0.8
Gummi - Asphalt (nass)	0.5	0.4
Ski auf Schnee (0°C)	0.1	0.05
Holz auf Holz	0.6	0.4
Eis auf Eis	0.1	0.03

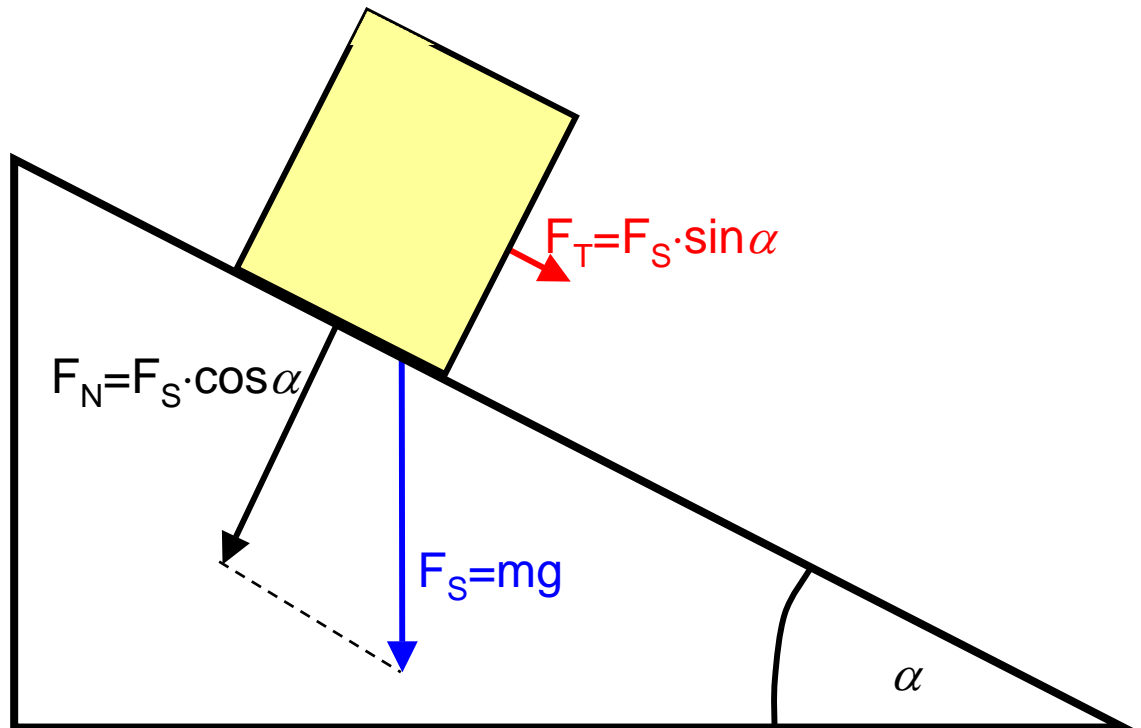


# Schiefe Ebene - Bestimmung von $\mu_H$

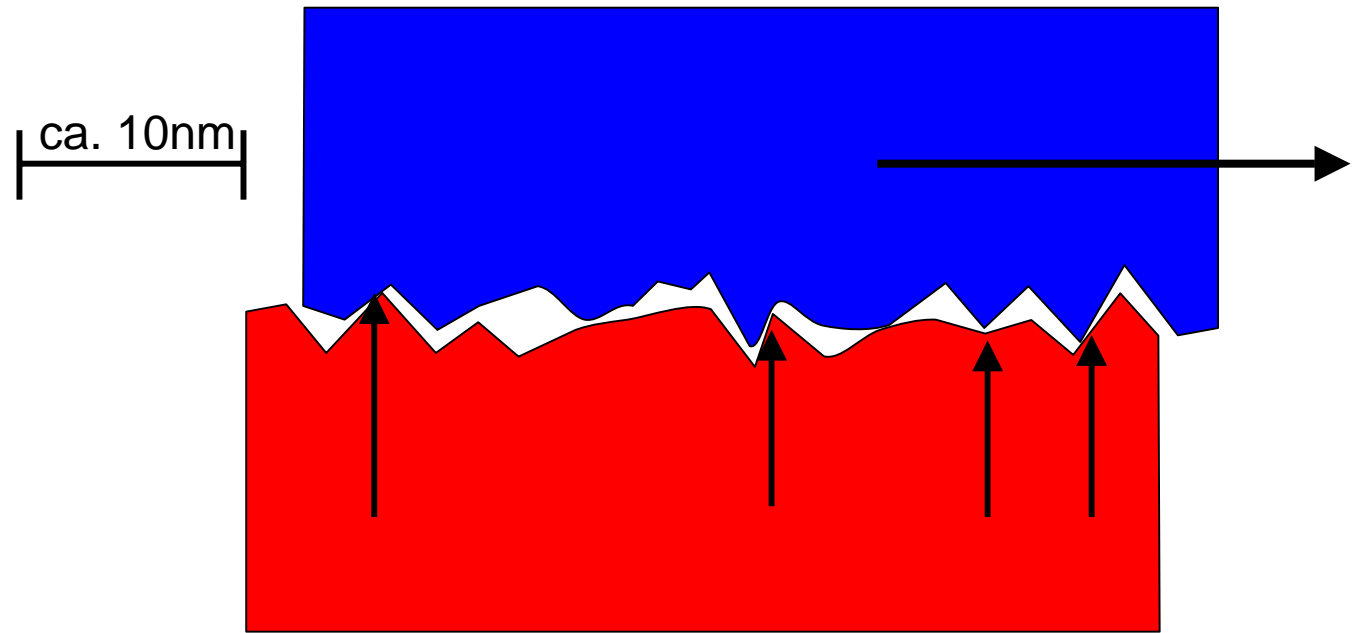
Der Körper rutscht sobald:

$$F_T \geq F_H = \mu_H \cdot F_N$$

$$\mu_H = \frac{F_T}{F_N} = \frac{mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = \tan \alpha$$



## b) Reibung - Mikroskopische Deutung



Die tatsächliche, mikroskopische Kontaktfläche (Pfeile) ist sehr klein.

Kontaktfläche (pro Flächeneinheit  $A$ ) wächst mit  $P = F_N/A$   
→ also Kontaktfläche unabhängig von  $A$

Der hohe Druck führt zur plastischen Verformung

Reibung ist abhängig vom Material **an der Oberfläche**  
→ Schmierung, Glatteis, ...

# 2. Elastizität fester Stoffe

## a) Das Hooke'sche Gesetz

$$\underbrace{\frac{\Delta l}{l}}_{\varepsilon} = \frac{1}{E} \underbrace{\frac{F}{A}}_{\sigma} \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma$$

E = Elastizitätsmodul, N/m<sup>2</sup>

σ = Zugspannung (oder einfach "Spannung"), N/m<sup>2</sup>

ε = Relative Längenänderung oder "Dehnung"

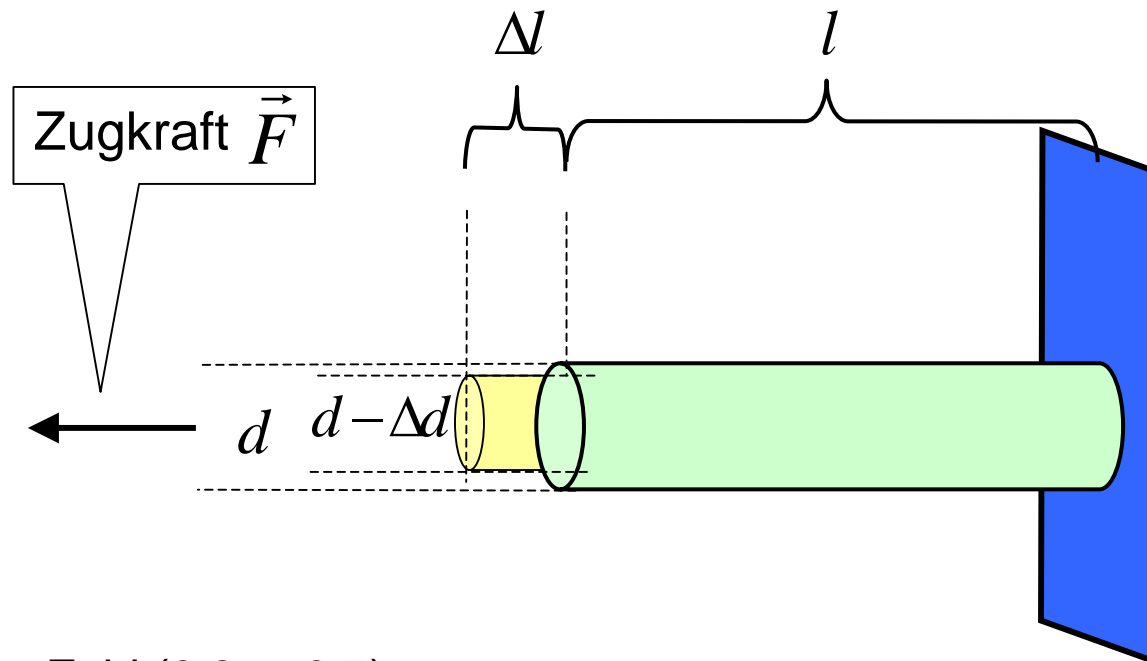
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/A}{\Delta l/l}$$

## b) "Querkontraktion":

$$\mu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} = \text{Poisson-Zahl (0.3 ... 0.5)}$$



Robert Hooke  
(1635-1703)



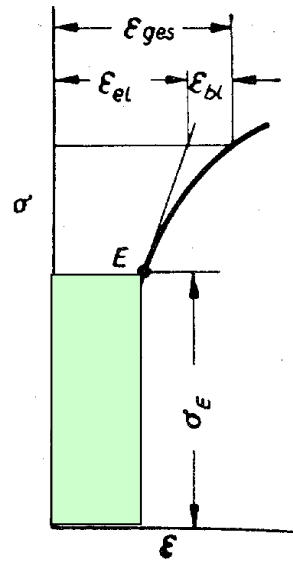
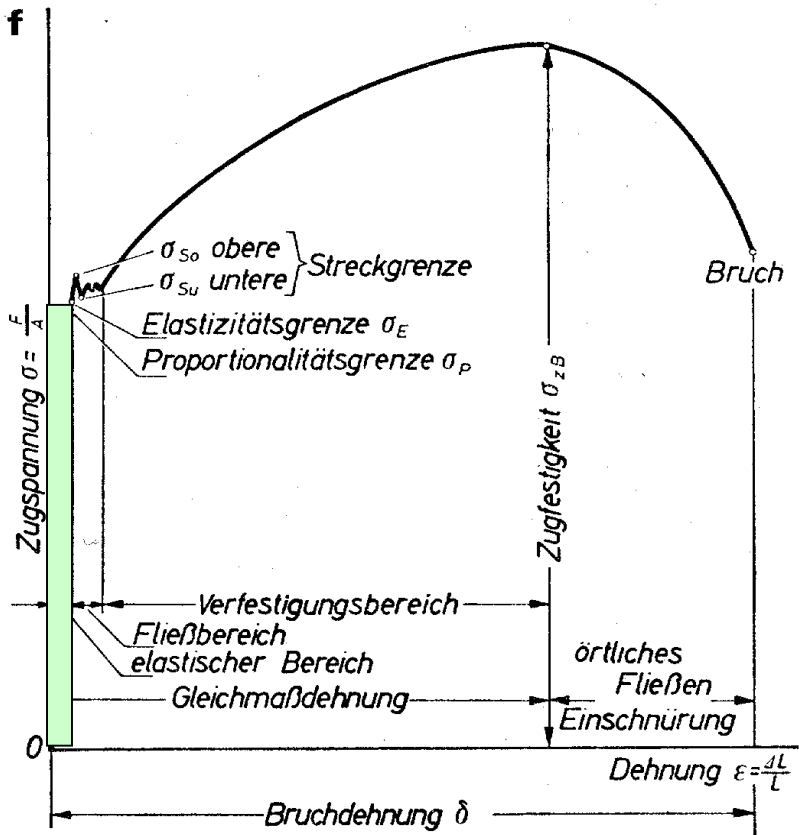
# Elastizitätsmodul, Zugfestigkeit, Schubmodul ...

Material	Elastizitätsmodul, E $10^{10} \text{ N/m}^2$	Zugfestigkeit $\sigma_Z$ $10^6 \text{ N/m}^2$	Schubmodul, G $10^{10} \text{ N/m}^2$
Eisen (Stahl)	20	520	8.4
Aluminium	7	90	3
Kupfer	11	230	4.2
Blei	1.6	12	0.6
Glas	6		
Kevlar (Aramidfaser)	6-12	2760	
Beton	2.3	2	
Eschen Holz	1		
Gummi	0.1		

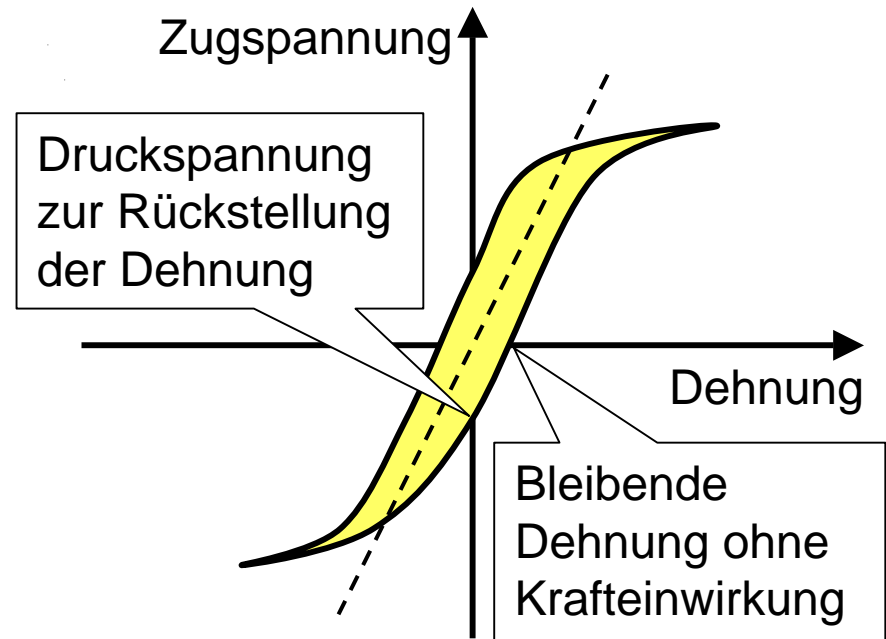
## c) Federkonstante - Elastizitätsmodul

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} \Rightarrow \Delta l = -x = \underbrace{\frac{1}{E} \cdot \frac{l}{A}}_{1/k_x} \cdot F \Rightarrow F = -k_x x, k_x = \frac{EA}{l}$$

# Jenseits der Elastizitätsgrenze ...



"Elastische Hysterese"



# Die Zerreißlänge:

Wann zerreißt ein frei aufgehängter Faden (Draht) unter seinem eigenen Gewicht?

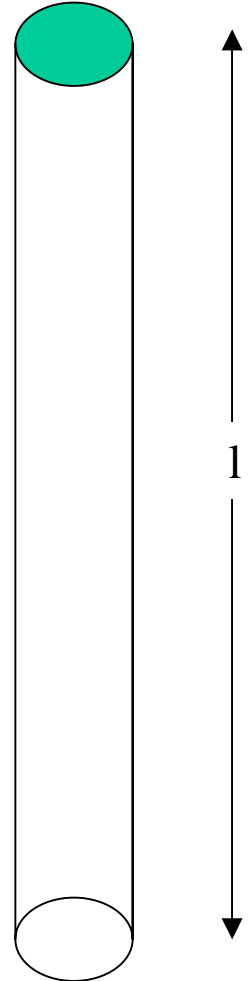
$$\sigma_z = \frac{F_z}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{Al \rho \cdot g}{A} = l \rho \cdot g \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\sigma_z}{\rho \cdot g}$$

$\rho$  = Dichte des Materials

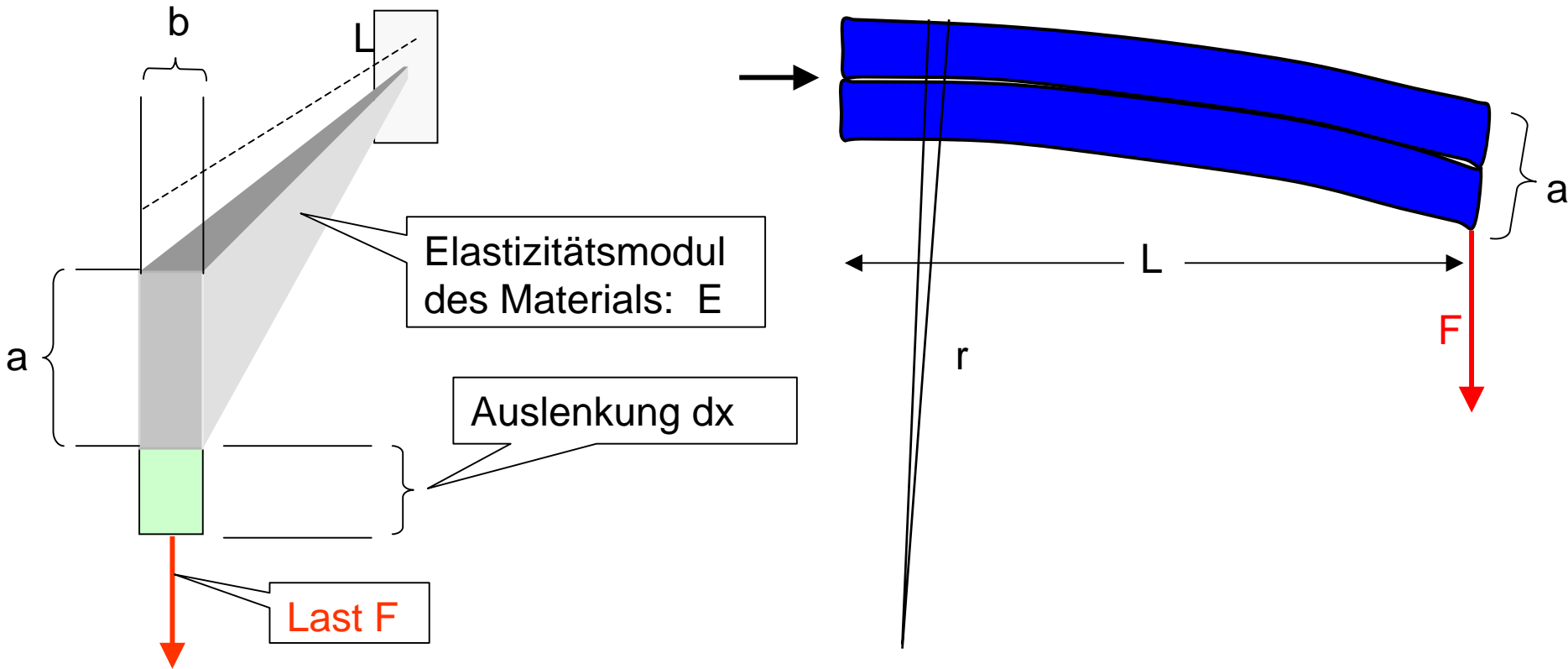
$\sigma_z$  = Zugfestigkeit des Materials

Zum Beispiel Eisen:

$\sigma_z \approx 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho \approx 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \rightarrow l \approx 12.5 \text{ km}$



# Biegung eines Balkens



$$M = F \frac{a}{2} \approx \alpha \frac{Ea^3b}{r}$$

$$\Rightarrow r = \alpha \frac{Ea^3b}{M} \propto a^3$$

$M$  = Drehmoment

$r$  = Krümmungsradius der Biegung

$\alpha = 1/12$  für rechteckigen Querschnitt

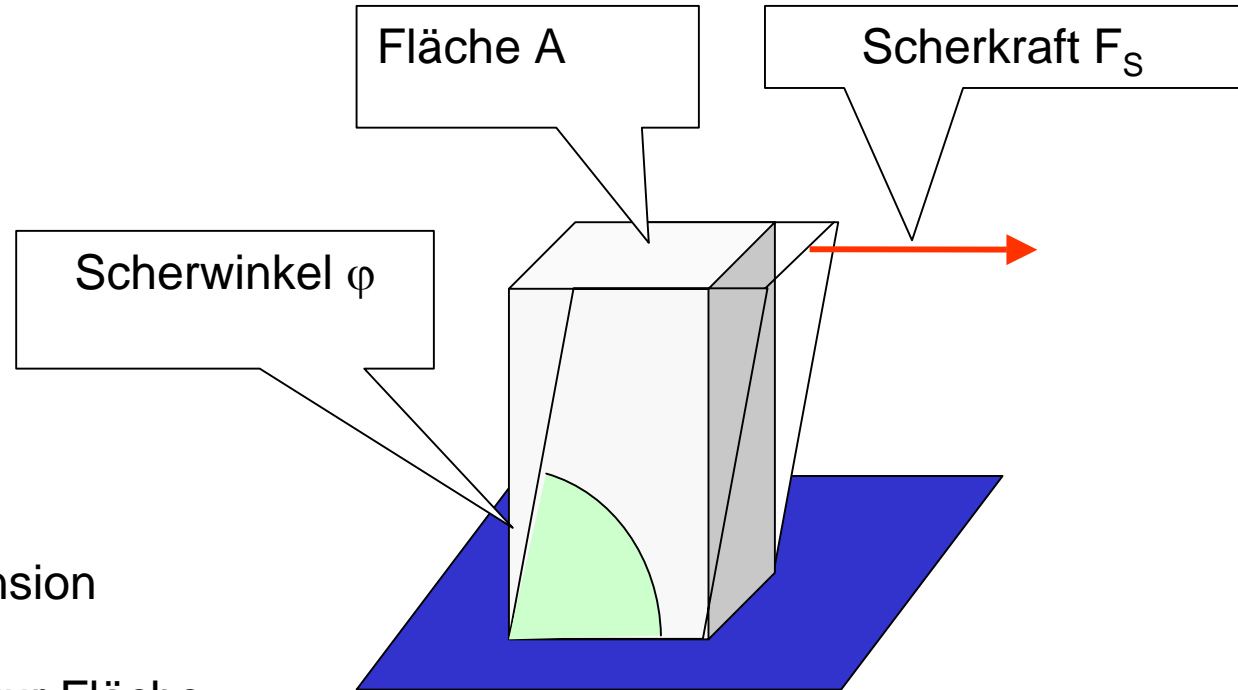
# Scherung und Schubmodul

**Schubspannung:**

$$\tau = \frac{F_S}{A}$$

Schubspannung hat Dimension eines Druckes,  
aber: Kraftvektor **parallel** zur Fläche

$$\varphi = \frac{\tau}{G}, \quad G = \frac{\tau}{\varphi} = \text{"Schubmodul"}$$



# Torsion eines Zylinders

Quader mit dem Querschnitt:

$$dA = 2\pi r \cdot dr$$

und Höhe L wird zu Zylinder mit Radius r,  
Wanddicke dr und Höhe L gebogen.

Scherwinkel  $\varphi \rightarrow$  Torsionswinkel  $\alpha$ :

$$\alpha = \varphi \frac{L}{r} = \frac{L \cdot \tau}{r \cdot G} = \frac{L}{2\pi r^2 \cdot G} \cdot \frac{dF}{dr} =$$

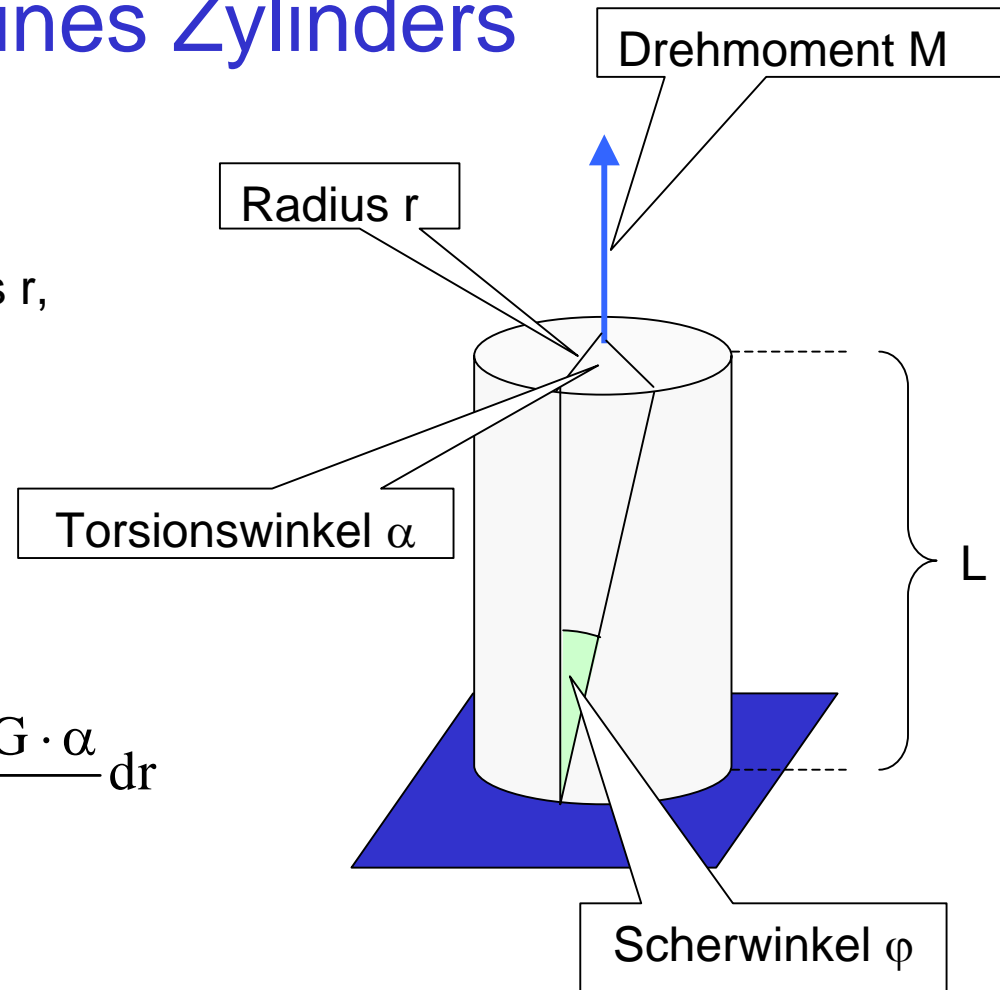
mit  $dM = r dF$ :

$$\alpha = \frac{L}{2\pi r^3 \cdot G} \cdot \frac{dM}{dr} \Rightarrow dM = \frac{2\pi r^3 \cdot G \cdot \alpha}{L} dr$$

Vollzylinder mit Radius R:

$$M = \frac{2\pi \cdot G \cdot \alpha}{L} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \cdot G \cdot R^4}{2L} \alpha$$

**G = Torsionsmodule = Schubmodul**



Damit ergibt sich die Torsions-  
Federkonstante (Richtmoment):

$$M = k_\alpha \cdot \alpha$$

$$k_\alpha = \frac{M}{\alpha} = \frac{\pi G \cdot r^4}{2L}$$

# 3. Ruhende Fluide

Ruhende Fluide erlauben im Inneren keine Scherkraft, (zug)spannung, Torsion.

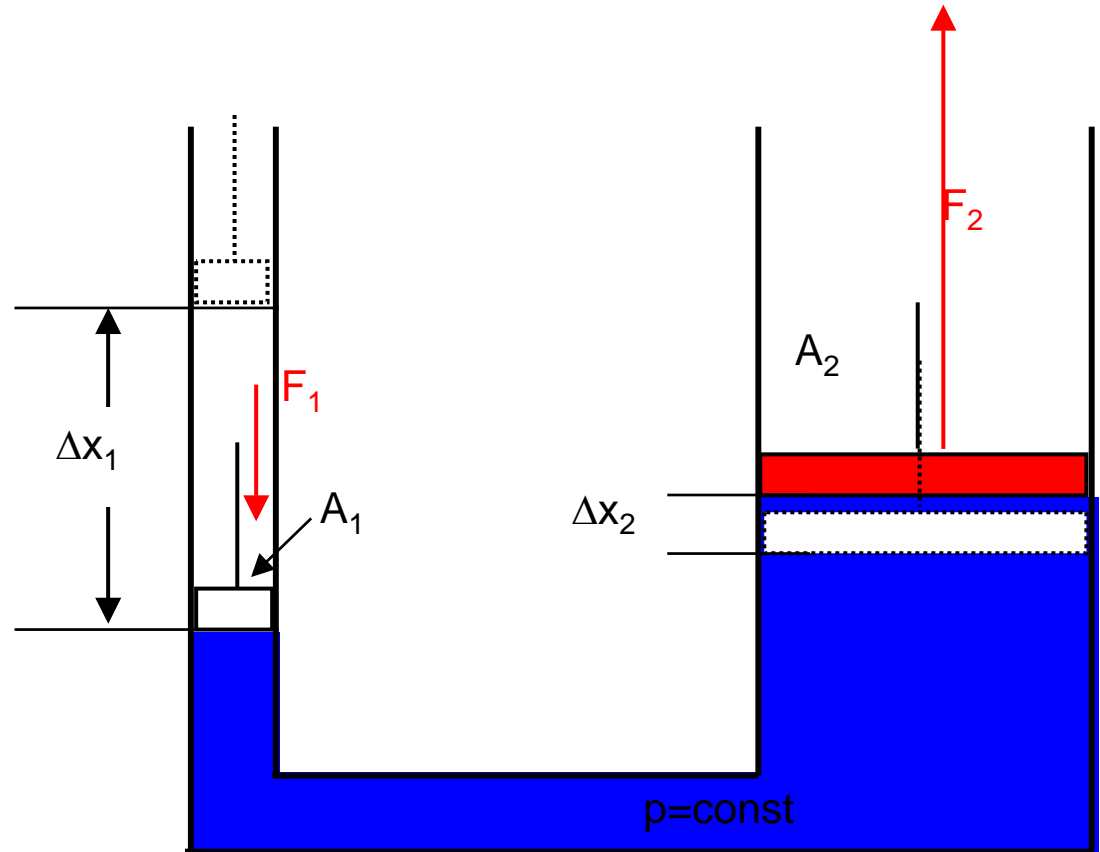
Hydraulische Presse:

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = p_2$$

Energiesatz:

$$V_1 = A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = V_2$$

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = F_2 \Delta x_2 = W_2$$



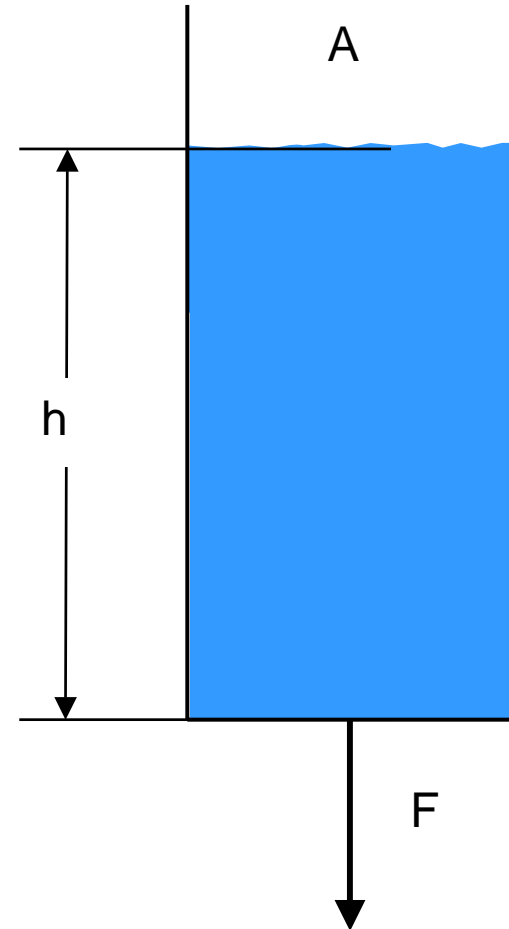
## a) Schweredruck (Hydrostatischer Druck)

Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule:

$$F = \rho_{\text{Fl}} g \cdot V = \rho_{\text{Fl}} g \cdot A \cdot h$$

Druck der Flüssigkeit:

$$p = \frac{F}{A} = \rho_{\text{Fl}} g \cdot h$$



## b) Auftrieb und Archimedisches Prinzip

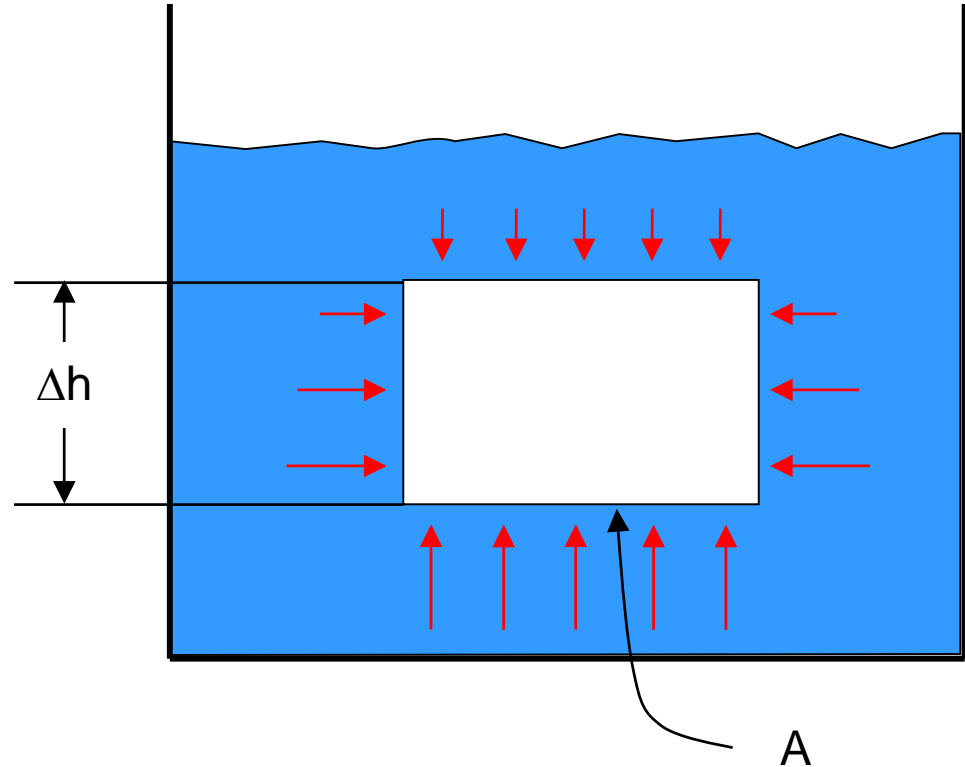
Auftriebskraft  $F_A$  eines (prismatischen) Körpers  
in einem Fluid der Dichte  $\rho_{fl}$ :

$$F_A = \Delta p \cdot A$$

$A$  = Querschnittsfläche

$$F_A = \rho_{fl} g \underbrace{\Delta h \cdot A}_V = \rho_{fl} g \cdot V$$

$M_v = \rho_{fl} V$  ist gerade die Masse des  
vom Körper verdrängten Wassers,  
 $F_A = M_v g = \rho_{fl} V g$  ist gerade das  
Gewicht des verdrängten Wassers.



# Der Versuch des Archimedes ("Heureka")

Gewicht der Krone:

$$F_K = \rho_K \cdot g \cdot V_K$$

Gewicht des verdrängten Wassers:

$$F_{fl} = \rho_{fl} \cdot g \cdot V_K = F_A$$

Gewicht der Krone im Wasser:

$$F_{KF} = F_K - F_A = g \cdot V_K (\rho_K - \rho_{fl})$$

Dichte der Krone also:

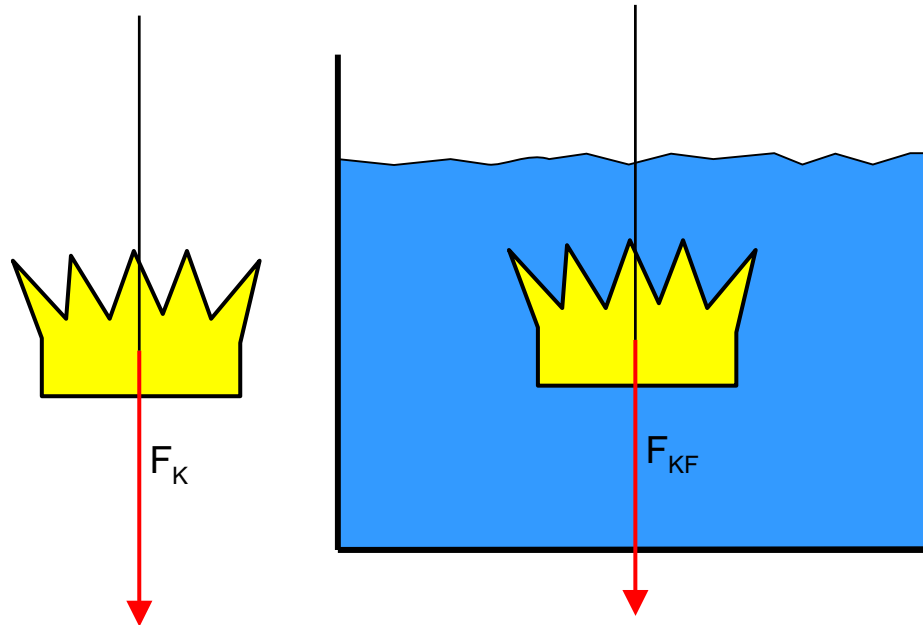
$$\rho_K = \frac{F_{KF}}{g \cdot V_K} + \rho_{fl}$$

$$F_K - F_{KF} = \rho_K \cdot g \cdot V_K - g \cdot V_K (\rho_K - \rho_{fl}) = g V_K \rho_{fl}$$

$$\Rightarrow V_K = \frac{F_K - F_{KF}}{g \cdot \rho_{fl}}$$

Dichte der Krone:

$$\begin{aligned} \rho_K &= \frac{F_{KF}}{g \cdot V_K} + \rho_{fl} = \frac{F_{KF}}{g} \cdot \frac{g \cdot \rho_{fl}}{F_K - F_{KF}} + \rho_{fl} \\ &= \frac{F_{KF}}{F_K - F_{KF}} \cdot \rho_{fl} + \rho_{fl} \end{aligned}$$



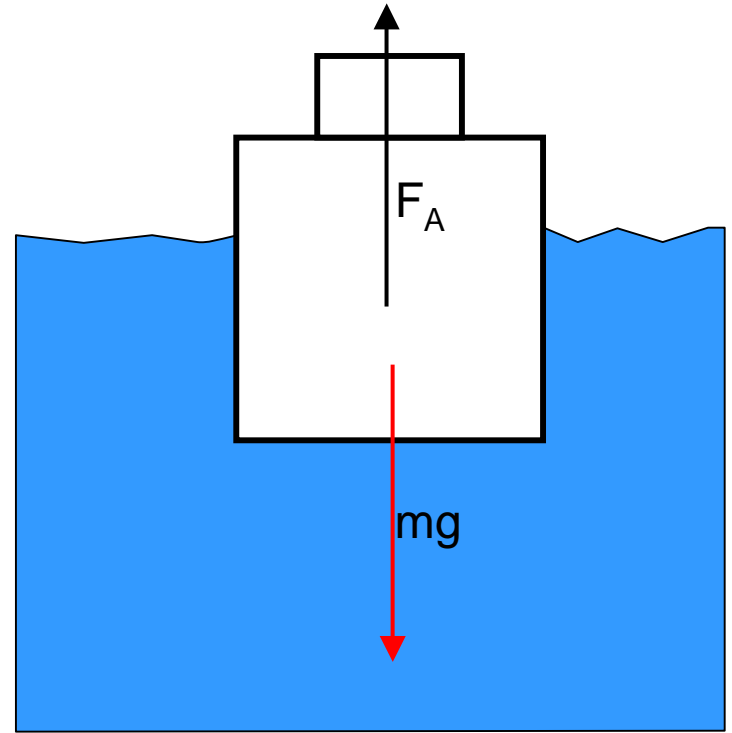
# Schwimmen

Schwimmen:  $F_A \geq \text{Gewicht}$

bzw:

$$F_A = \rho_{\text{Fl}} g \cdot V > mg = \rho_{\text{Körper}} g \cdot V$$

$$\Rightarrow \rho_{\text{Fl}} > \rho_{\text{Körper}}$$



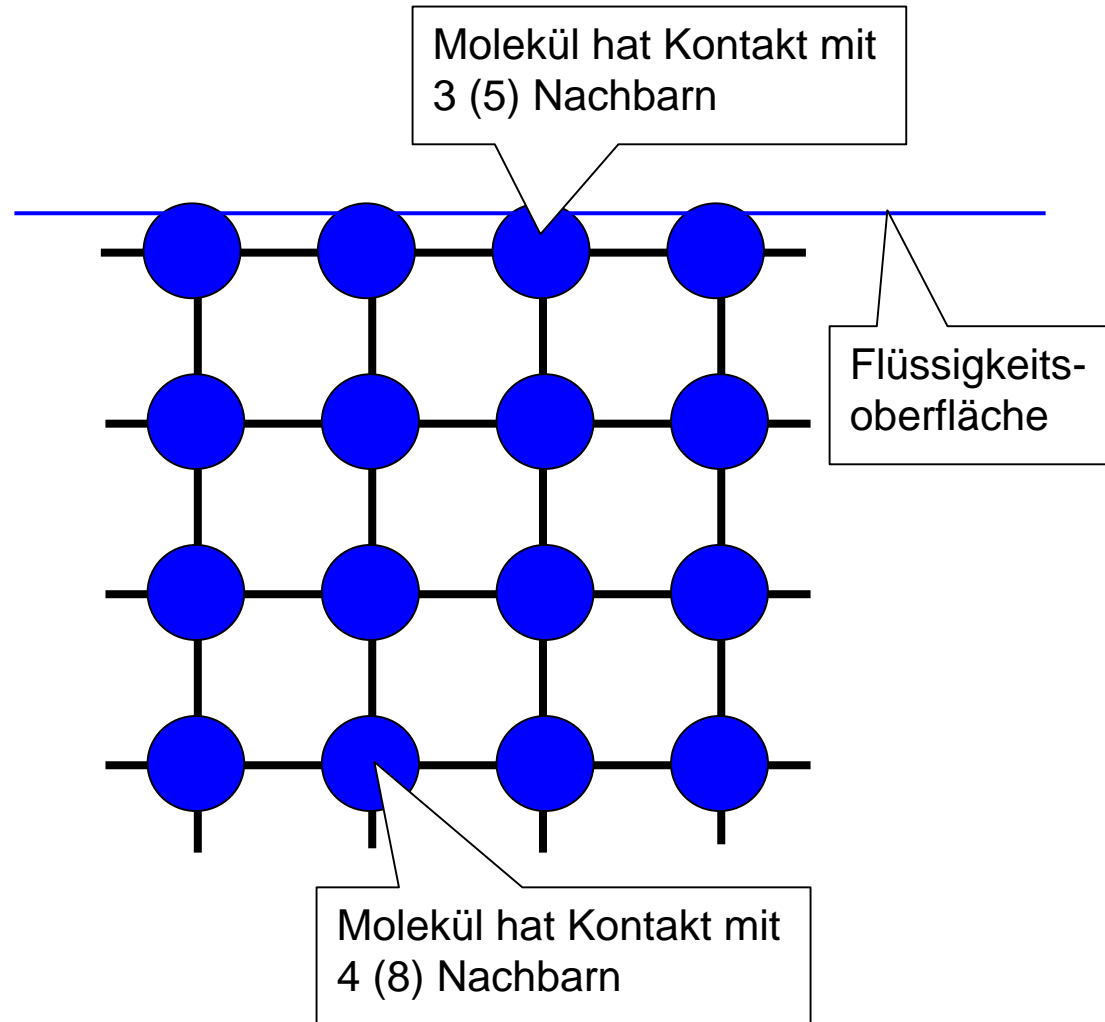
Titanic – Eisberg (?)  
(20. 4. 1912)

# Flüssigkeitsoberfläche

Spezifische Oberflächenenergie:

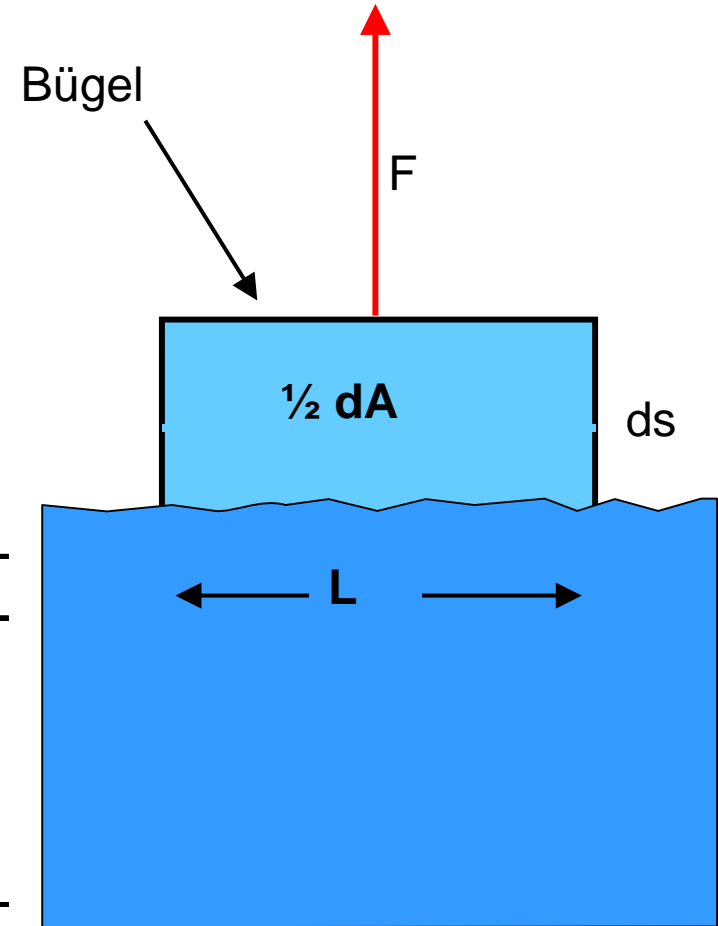
$$\varepsilon_A = \frac{dE}{dA} = \frac{\text{Energiezufuhr}}{\text{Flächenzuwachs}}$$

Dimension:  $\text{Nm/m}^2 = \text{N/m}$   
(Kraft)/(Länge)



# Bestimmung der Oberflächenspannung

$$\varepsilon_A = \frac{dE}{dA} = \frac{F ds}{2L ds} = \frac{F}{2L}$$



Substanz	Oberflächenspannung $10^{-3}$ N/m
Ethylalkohol	22
Petroleum	26
Olivenöl	32
Glyzerin	63
Wasser	72.5

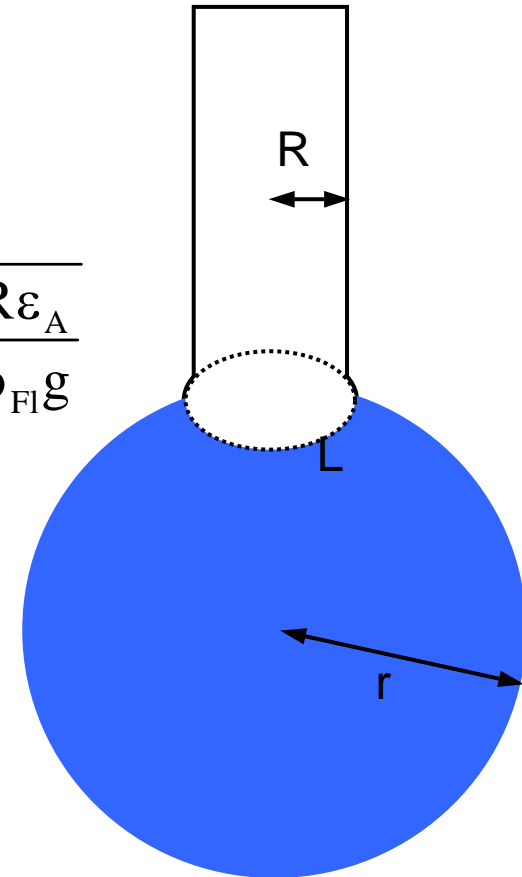
# Oberflächenspannung

Tropfen (Tropfender Wasserhahn, ...)  
Gewichtskraft  $mg$  = Haltekraft  $L\varepsilon$

$$\frac{4}{3}r^3\pi\rho_{\text{Fl}}g = 2\pi R\varepsilon_A$$

$\Rightarrow$

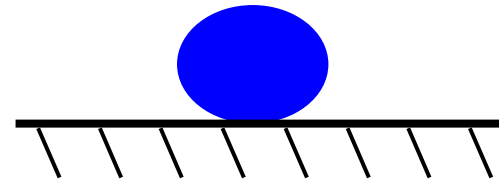
$$r^3 = \frac{3R\varepsilon_A}{2\rho_{\text{Fl}}g}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{3R\varepsilon_A}{2\rho_{\text{Fl}}g}}$$



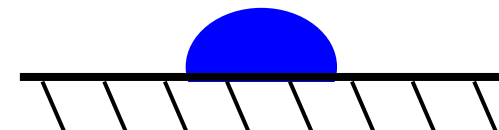
fest – flüssig: Adhäsionskraft  $F_A$

flüssig– flüssig: Kohäsionskraft  $F_K$

$F_K > F_A$ : Flüssigkeit bildet Tropfen



$F_K < F_A$ : Flüssigkeit benetzt die Oberfläche



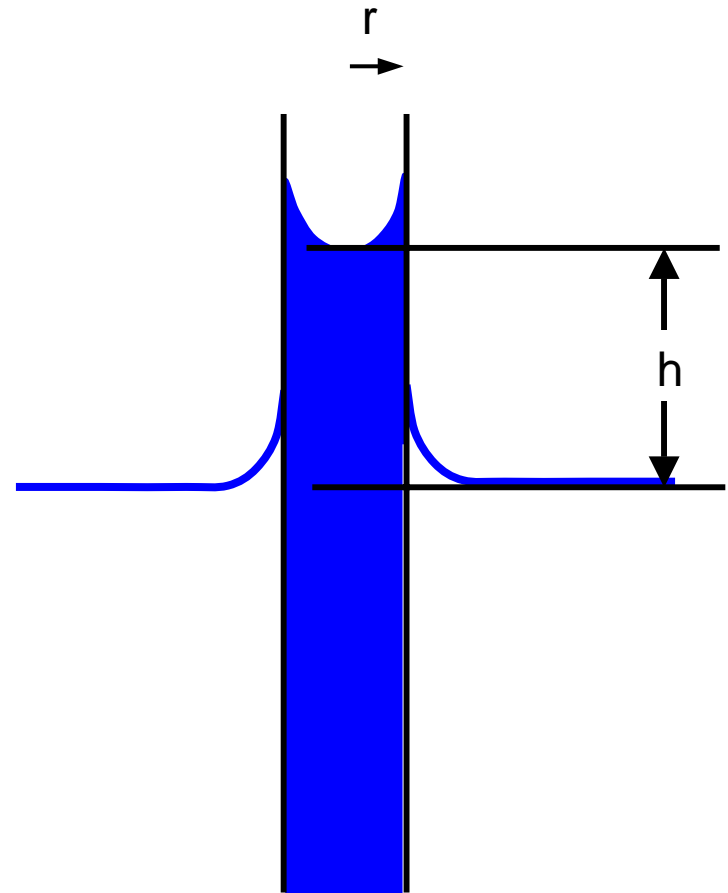
# Kapillarität

Schwerkraft  $mg =$  Oberflächenkraft  $2\pi r \varepsilon_A$ :

$$m \cdot g = \pi r^2 h \rho_{\text{fl}} \cdot g = 2\pi r \varepsilon_A$$

$$r h \rho_{\text{fl}} \cdot g = 2\varepsilon_A$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\varepsilon_A}{\rho_{\text{fl}} g r} \propto \frac{1}{r}$$



# 4. Strömende Flüssigkeiten und Gase

## a) Bernoulli - Gleichung

Strömungsgeschwindigkeit:

$$v_1 = \frac{x_1}{t}, \quad v_2 = \frac{x_2}{t}$$

mit

$$\Delta V = x_1 A_1 = x_2 A_2$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{A_2}{A_1} \Rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

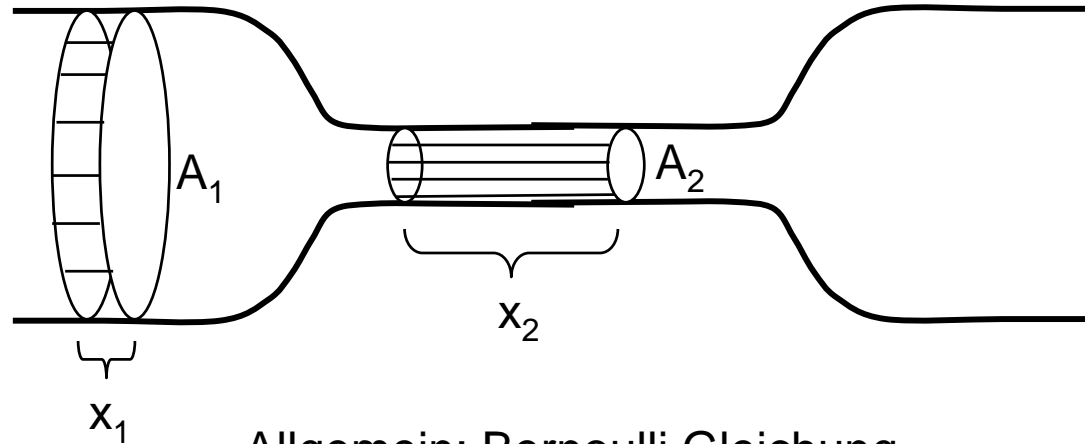
$$E_{\text{kin}1} = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \cdot v_1^2$$

$$E_{\text{kin}2} = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V \cdot v_2^2$$

$$W_1 = p_1 \cdot \Delta V, \quad W_2 = p_2 \cdot \Delta V \quad \text{also:}$$

$$W_1 + E_{\text{kin}1} = W_2 + E_{\text{kin}2}$$

$$\text{für } E_{\text{kin}} \text{ eingesetzt: } p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$



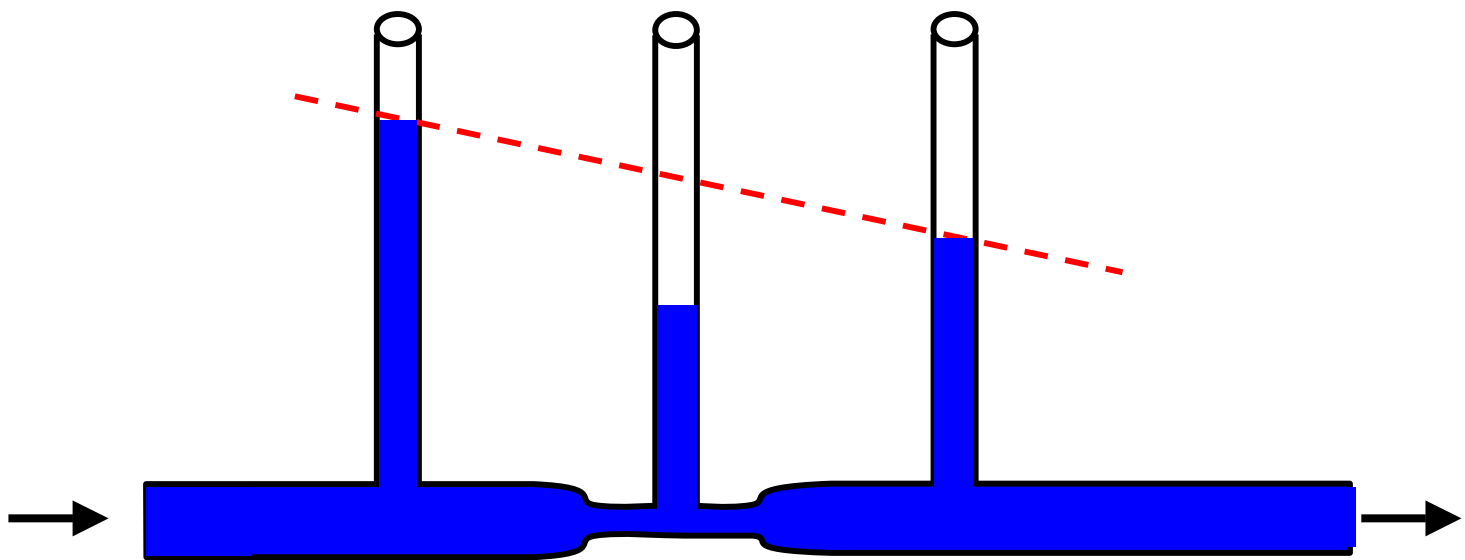
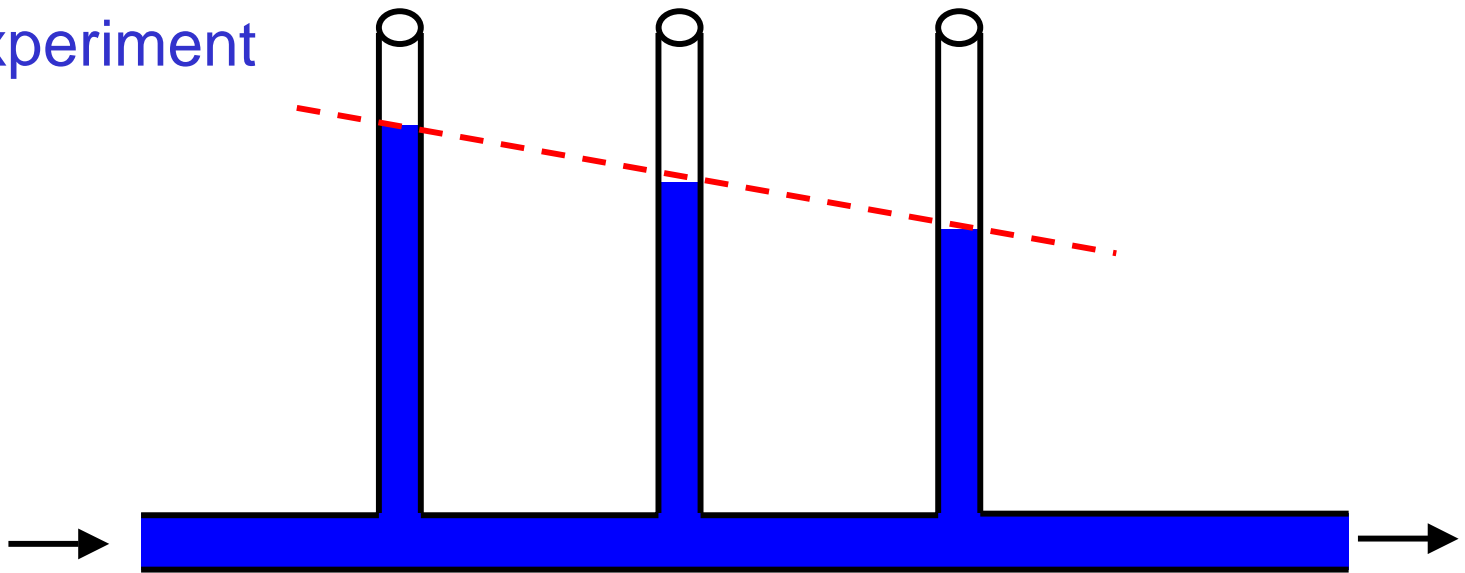
Allgemein: Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = \text{const.}$$



Daniel Bernoulli, 1700-1782

# Bernoulli Experiment



Druck: hoch

niedrig

hoch



Beschleunigung

Abbremsung

# Flugzeugflügel - Auftrieb

Längerer Weg, daher höhere Strömungsgeschwindigkeit auf der Flügeloberseite.

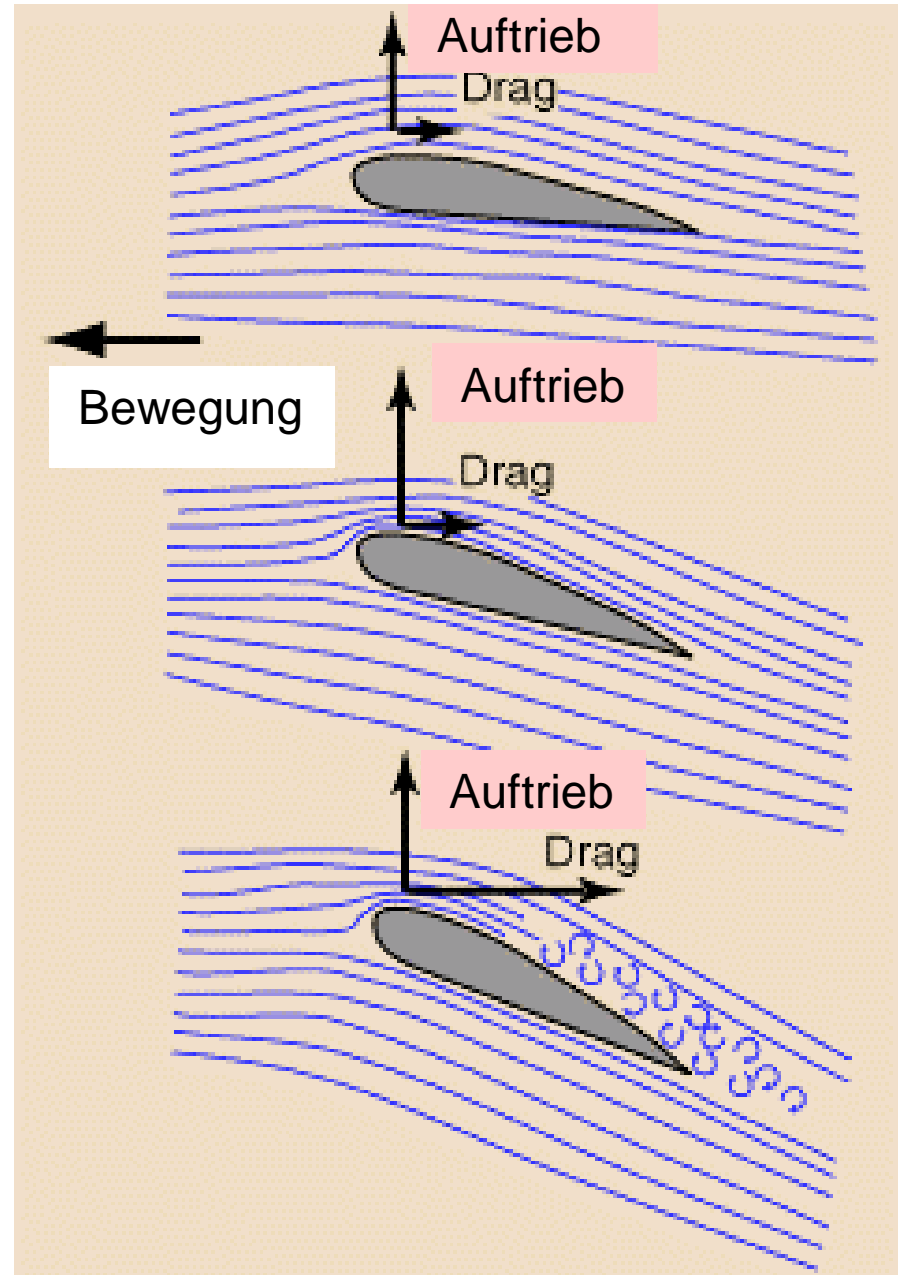
$$p_{\text{oben}} + \frac{\rho}{2} v_{\text{oben}}^2 = p_{\text{unten}} + \frac{\rho}{2} v_{\text{unten}}^2$$

$$\text{da: } v_{\text{oben}} > v_{\text{unten}}$$

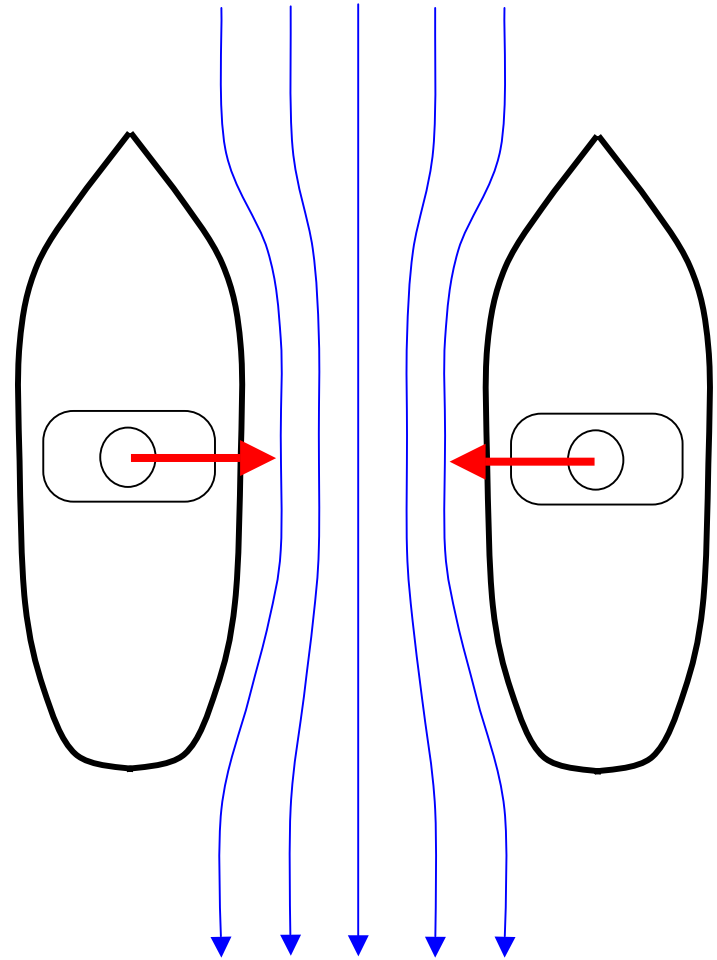
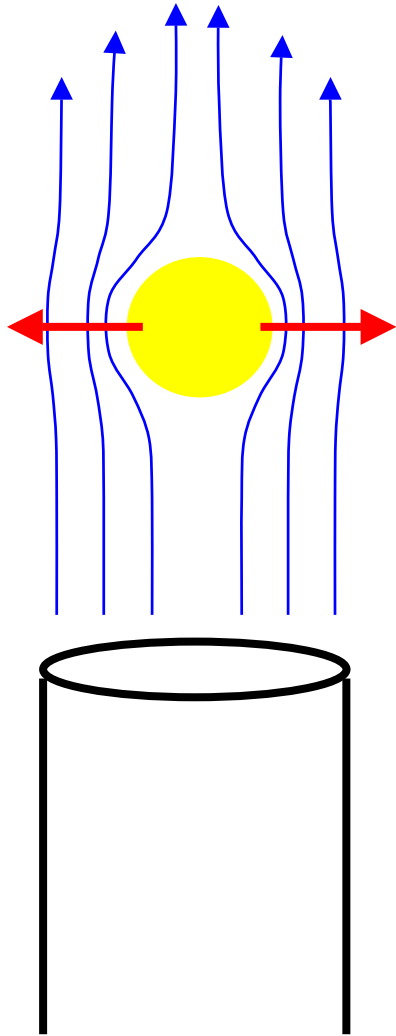
$$\Rightarrow p_{\text{oben}} < p_{\text{unten}}$$

$\Rightarrow$  Auftriebskraft:

$$F = A_{\text{Flügel}} \cdot (p_{\text{unten}} - p_{\text{oben}})$$



# Bernoulli Effekte



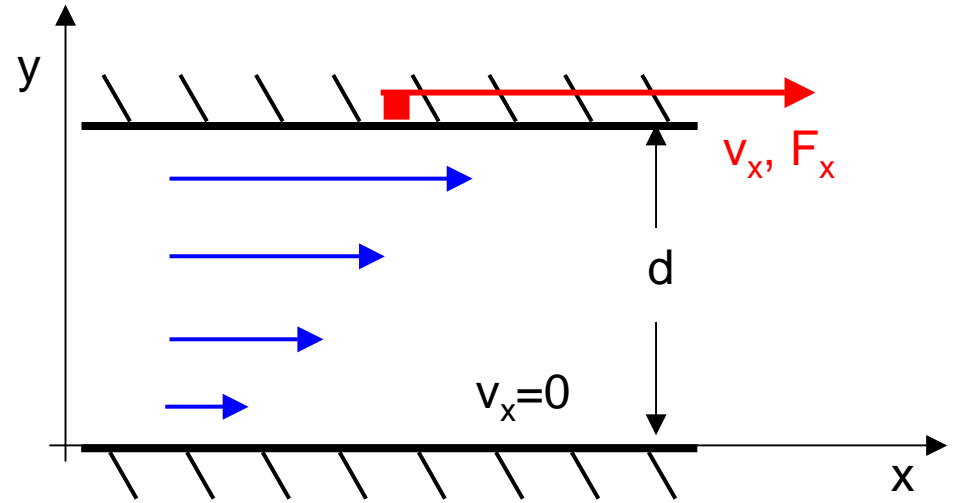
# Viskosität

Kraft zur Bewegung der oberen Platte:

$$F = \eta \frac{A v_x}{d}$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \eta \frac{v_x}{d} = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

Newton Druck



(dynamische) Zähigkeit:  $\text{Ns/m}^2$

Wasser:  $1.025 \cdot 10^{-3}$

Ethanol:  $1.021 \cdot 10^{-3}$

Glyzerin:  $1.53 \cdot 10^{-3}$

Luft:  $1.74 \cdot 10^{-5}$

# Stokes - Gesetz und Aerosol ("Feinstaub")

Allgemein gilt für laminare Strömung

$$F = \text{const} \cdot \eta \cdot v$$

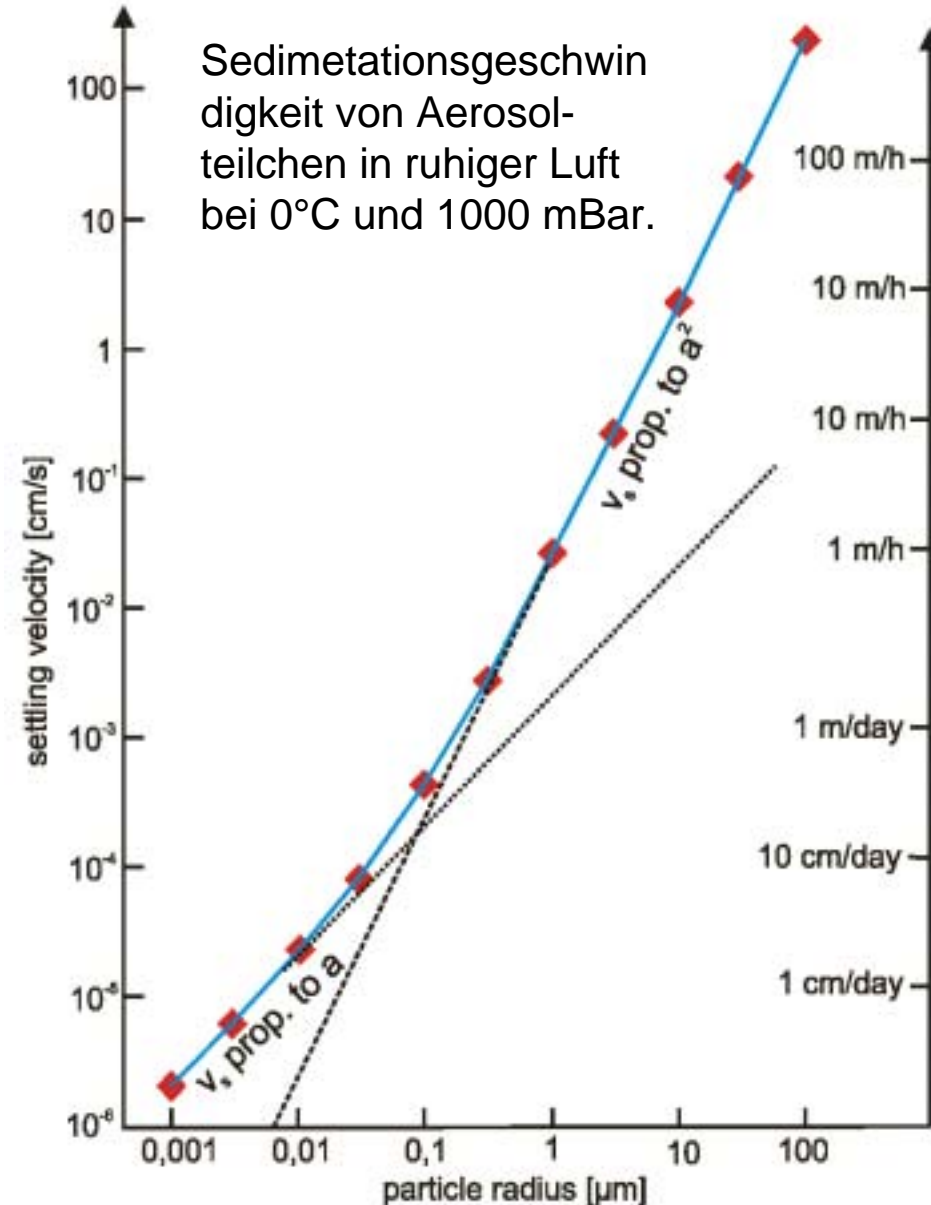
Speziell für Kugeln:

$$F = -6\pi r \cdot \eta \cdot v$$

Beispiel: Fallgeschwindigkeit von Aerosolteilchen in der Atmosphäre

$$F_G = M \cdot g = \rho_{\text{aer}} \cdot V \cdot g = \rho_{\text{aer}} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot g$$

$$v = \frac{\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot g}{6\pi \cdot r \cdot \eta} = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot \rho_{\text{aer}} \cdot g}{\eta}$$



# Newton - Reibung

Staudruck:

$$p_s = \frac{\rho}{2} v^2$$

Reibungskraft:

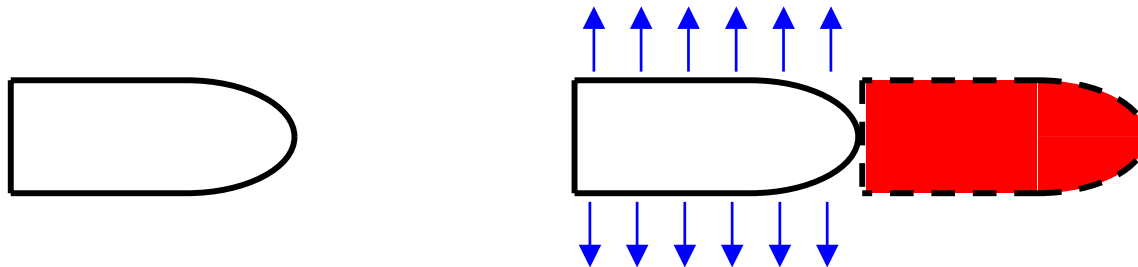
$$F = p_s A \cdot C_w = C_w A \cdot \frac{\rho}{2} v^2$$

$C_w$  = **Luftwiderstandsbeiwert**,  
z.B. Auto  $C_w = 0.2 \dots 0.5$

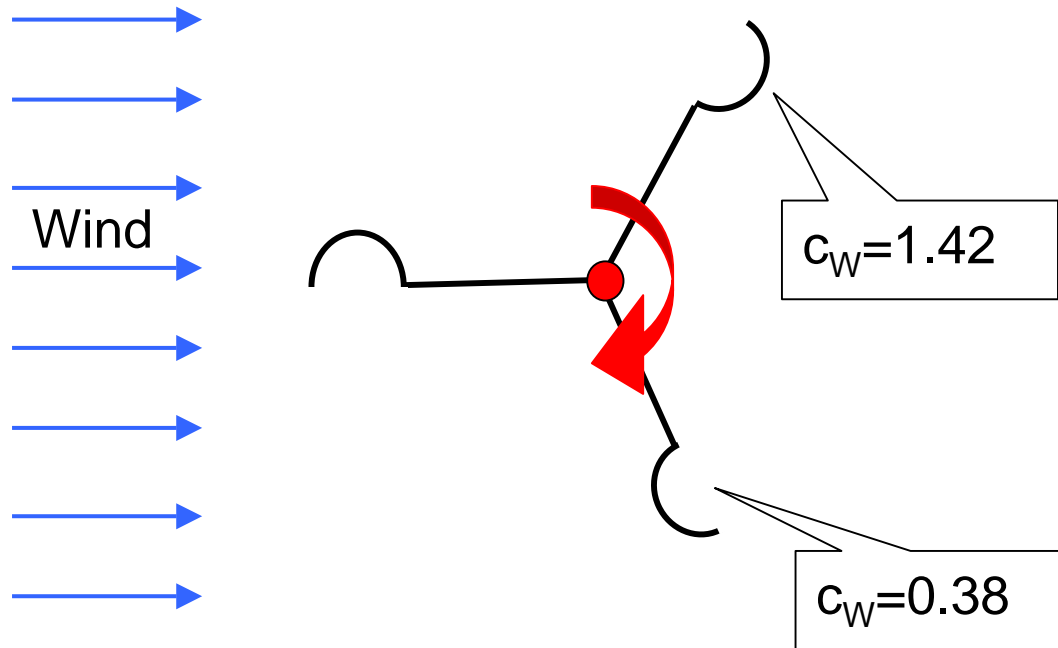
Bemerkung:

Zähigkeit spielt (im Grenzfall unendlich hoher Geschwindigkeit) keine Rolle!

→ Arbeit wird nur dazu verwendet die umgebende Flüssigkeit beiseite zu schleudern.



# Newton – Reibung: Beispiel Schalenkreuzanemometer



## Idealisierte Grenzfälle:

Parameter	Stokes – Reibung	Newton – Reibung
Mechanismus	Molekulare Reibung	Beschleunigung des Mediums
Bestimmende Größe	Zähigkeit $\eta$	Dichte $\rho$
bei Reynoldszahl	$Re \rightarrow 0$	$Re \rightarrow \infty$
Strömungstyp	laminar	turbulent
Abhängigkeit von $v, r$	$F \propto v \cdot r$	$F \propto v^2 \cdot r^2$

# Luftwiderstand

Fahrwiderstände eines PKW:

Beispiel:  $C_W = 0.3$ ,  $A = 2 \text{ m}^2$ ,  $m = 1200 \text{ kg}$

1) Rollwiderstand  $F_R \approx 0.0125 \cdot F_N = 0.0125 \cdot mg$

2) Reibungswiderstand  $F_A = p_{(v=0)} A \cdot C_W = C_W A \cdot \frac{\rho}{2} v^2$

<b>Geschwindigkeit v</b> <b>km/h (m/s)</b>	<b>F<sub>R</sub></b> <b>N</b>	<b>F<sub>A</sub></b> <b>N</b>	<b>F<sub>T</sub> = F<sub>R</sub> + F<sub>A</sub></b> <b>N</b>	<b>P = F<sub>T</sub> · v</b> <b>kW</b>
30 (8.33)	147	26.9	174	1.45
50 (13.88)	147	74.7	222	3.08
100 (27.77)	147	299	446	12.4
150 (41.66)	147	672	819	34.1
200 (55.55)	147	1194	1341	74.5

# Kavitation (Hohlraumbildung)

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = p_{\text{ges}} \quad \text{bzw.} \quad p = p_{\text{ges}} - \frac{\rho}{2} v^2$$

Bei "hoher" Strömungsgeschwindigkeit erhalten wir:

$$p = p_{\text{ges}} - \frac{\rho}{2} v^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad p_{\text{ges}} - \frac{\rho}{2} v_K^2 = 0$$

$$\Rightarrow p_{\text{ges}} = \frac{\rho}{2} v_K^2 \quad \Rightarrow \quad v_K = \sqrt{\frac{2p_{\text{ges}}}{\rho}} \quad \text{Bei } v > v_K \text{ bilden sich Hohlräume (Blasen) in der Flüssigkeit}$$

Beispiele:

Wasser ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) an der Oberfläche ( $p_{\text{ges}} = p_{\text{atm}} \approx 10^5 \text{ N/m}^2$ )  $\rightarrow$   
 $v_K \approx 14 \text{ m/s}$ .

(In der Praxis ist  $v_K$  sogar noch ein wenig kleiner, da  $p$  nur  $<$  Wasserdampfdruck werden muss.)

In 10 m Wassertiefe:  $p_{\text{ges}} = p_{\text{atm}} + \rho g z \approx 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \rightarrow v_K \approx 17.3 \text{ m/s}$

Kollabieren der Blasen kann zu Schäden an Rohren, Ventilen, Schiffschrauben, etc. führen.

# Missverständnisse: "Superkavitation"

Zeitungstext:

„Schneller als die Concorde und das unter Wasser: Techniker haben ein Schlupfloch der Physik entdeckt, das Marine-Soldaten das Gruseln lehrt. Jetzt tüfteln die USA und Russland an militärischen Geheimprojekten.“



"Der Torpedo bewegt sich in einer durch Kavitation erzeugten Dampfblase praktisch reibungsfrei."

Was ist mit Newton Reibung?



# Turbulenz - Reynoldszahl

$$\text{Re} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}} \propto \frac{\rho v \frac{v}{d_1}}{\eta \frac{v}{d_2^2}} = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{v d}{\nu}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} = \text{kinematische Zähigkeit}$$

Beispiel: Reynoldszahl eines mit 30 Km/h fahrenden PKW:

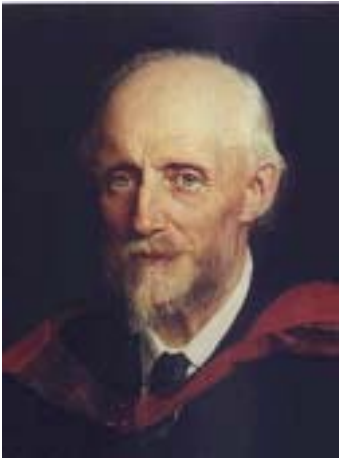
$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\eta} \approx \frac{1.29 \cdot 8.33 \cdot 1}{1.74 \cdot 10^{-5}} \approx 618000$$

Turbulenz:

Ungeordnete, chaotische Bewegung der Fluidelemente.

Strömungen mit  $\text{Re} > 1000 \dots 2000$  sind in der Regel turbulent.

Die meisten technisch wichtigen Strömungen sind turbulent.



Osborne Reynolds,  
1842 – 1912  
Irischer Ingenieur  
Vorschlag: Re in 1883

