

## 5. Der Wärmehaushalt von Gewässern

### 5.1 Prozesse des Wärmeüberganges

An der Oberfläche von Gewässern wird ständig Energie ausgetauscht und zwar in zwei sehr verschiedenen Formen: Als Wärme und als mechanische Energie. In diesem Kapitel wird der Austausch von *Wärme* zwischen Wasser und Atmosphäre behandelt; die mechanischen Energieflüsse bilden Gegenstand des 4. Kapitels (insbesondere 4.3 und 4.4). Im 5. Kapitel betrachten wir dann die Prozesse an der Grenze zwischen Wasser und Atmosphäre, zu denen auch der Wärmeaustausch gehört, genauer.

#### Strahlungsgesetze

Zum Verständnis des Folgenden ist eine kurze Repetition der *Strahlungsgesetze* für sog. *schwarze Strahler* (bzw. schwarze Körper) nützlich:

1. **Stefan-Boltzmann'sches Gesetz:** Die totale (d.h. über alle Wellenlängen summierte) Strahlungsintensität  $H$  eines schwarzen Körpers ist:

$$(5.1) \quad H = \sigma T^4 \quad [\text{W m}^{-2}]$$

mit  $T$  [K]: absolute Temperatur des Strahlers  
und  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Für nicht-schwarze ("graue") Strahler ist die Abstrahlung kleiner, aber immer noch ungefähr proportional zu  $T^4$ .

2. **Wien'sches Verschiebungsgesetz:** Der Wellenlängenbereich  $\lambda_{\text{max}}$ , in welchem die maximale Energie ausgestrahlt wird, verschiebt sich mit zunehmender Strahlertemperatur  $T$  nach kürzeren Wellen:

$$(5.2) \quad \lambda_{\text{max}} = \frac{a}{T} \quad [\text{m}]$$

mit  $a = 2.9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

#### Beispiele:

- a) Bei 300 K (27°C) ist  $\lambda_{\text{max}}$  ca.  $10 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  (10  $\mu$ ) (Infrarot-Bereich)
- b) Die Sonne mit einer "effektiven" (mit 5.1 berechneten) Oberflächentemperatur von ca. 5800 K strahlt bei ca. 500 nm maximal.

### Wärmeaustausch Wasser-Atmosphäre

Der totale Wärmefluss von der Atmosphäre ins Wasser lässt sich in 5 Komponenten aufteilen:

$$(5.3) \quad H_{\text{tot}} = H_S + H_A - H_W - H_V - H_K \quad [\text{Wm}^{-2}]$$

Die einzelnen Terme bedeuten die kurzweilige Strahlung der Sonne (S), die Wärmestrahlung der Atmosphäre (A) und des Wassers (W), der Wärmefluss durch Verdunstung (V), sowie durch Konvektion (K).

Zur genaueren Beschreibung der einzelnen Terme mit Hilfe von mehrheitlich empirischen Beziehungen führen wir die in Tab. 5.1 zusammengefassten Größen ein.

**Tab. 5.1:** Definition der Größen zur Berechnung des Wärmeaustausches zwischen Wasser und Atmosphäre

B	[-]:	Relativer Anteil des durch Wolken bedeckten Himmels
Bo	[mbar K <sup>-1</sup> ]:	Bowen-Verhältnis (Bo = 0.65)
E <sub>W</sub>	[-]:	Emissionskoeffizient von Wasser (E <sub>W</sub> = 0.97)
E <sub>A</sub>	[-]:	Emissionskoeffizient der Atmosphäre (abhängig von Wasserdampf- und CO <sub>2</sub> -Gehalt)
e <sub>W</sub>	[mbar]:	Sättigungsdampfdruck bei Temp. der Wasseroberfläche
e <sub>A</sub>	[mbar]:	Dampfdruck in der Atmosphäre
H <sub>S</sub> , H <sub>A</sub> , H <sub>W</sub> ,		
H <sub>V</sub> , H <sub>K</sub>	[W m <sup>-2</sup> ]:	Einzelne Anteile des Wärmeflusses (vgl. Text)
H <sub>S</sub> <sup>0</sup>	[W m <sup>-2</sup> ]:	Kurzweilige Sonneneinstrahlung bei klarem Himmel
p	[mbar]:	Luftdruck
q <sub>V</sub>	[mm/Tag]:	spezifischer Wasserfluss durch Verdunstung (pro Tag)
r <sub>S</sub>	[-]:	Reflexion der kurzweiligen Einstrahlung an der Wasseroberfläche (r <sub>S</sub> = 0.04 (Juli) bis 0.14 (Januar))
r <sub>A</sub>	[-]:	Reflexion der langweiligen atmosphärischen Einstrahlung an der Wasseroberfläche (r <sub>A</sub> = 0.03)
T <sub>A</sub> , T <sub>W</sub> ,	[K]:	Absolute Temperaturen von Atmosphäre und Wasser
u, u <sub>10</sub>	[m s <sup>-1</sup> ]:	Windgeschwindigkeit über dem Wasser, allgemein bzw. 10 m über der Wasseroberfläche
σ	[W m <sup>-2</sup> K <sup>-4</sup> ]:	Stefan-Boltzmann'sche Strahlungskonstante (σ = 5.67·10 <sup>-8</sup> W m <sup>-2</sup> K <sup>-4</sup> )

Damit lassen sich die Terme in Gl. (5.3) wie folgt diskutieren:

**H<sub>S</sub>**: Der vom Wasser absorbierte Anteil der *kurzwelligigen* Strahlung von *Sonne* und *Himmel*:

$$(5.4) \quad H_S = (1 - r_s) H_S^0 (1 - 0.65 \cdot B) \quad [\text{W m}^{-2}]$$

**H<sub>A</sub>**: Der vom Wasser absorbierte Teil der langwelligen (infraroten) Strahlung der Atmosphäre

$$(5.5) \quad H_A = (1 - r_A) E_A \sigma T_A^4 \quad [\text{W m}^{-2}]$$

Bis auf die Reflexion des Wassers ( $r_A$ ) und den Emissionskoeffizienten der Atmosphäre  $E_A$  ist dies das Stefan-Boltzmann'sche Gesetz (5.1), angewandt auf die Atmosphäre als (Infrarot-)Strahler. Da die Strahlung hauptsächlich vom Wasserdampf und dem  $\text{CO}_2$  in der Luft ausgeht, hängt  $E_A$  von den meteorologischen Bedingungen ab. Es gibt verschiedene Ansätze; wir benützen die empirische Formel von **Brutsaert**:

$$(5.6) \quad E_A = 1.24 \left( \frac{e_A}{T_A} \right)^{1/2} \quad (e_A \text{ in [mbar]}, T \text{ in [K]}) \quad [-]$$

Typische Werte für  $E_A$  nach (5.6) liegen im Bereich 0.7 bis 0.9. Die atmosphärische Strahlung wird durch Wolken um den Faktor  $(1 + 0.17 B^2)$  vergrößert, so dass sich schließlich folgendes ergibt (mit Zahlen aus Tab. 5.1)

$$(5.7) \quad H_A = (1 - r_A) \cdot 1.24 \left( \frac{e_A}{T_A} \right)^{1/2} (1 + 0.17 B^2) \sigma T_A^4 \quad [\text{W m}^{-2}]$$

$$H_A = 6.8 \cdot 10^{-8} \cdot \left( \frac{e_A}{T_A} \right)^{1/2} \cdot (1 + 0.17 B^2) \cdot T_A^4 \quad [\text{W m}^{-2}]$$

**H<sub>W</sub>**: Langwellige (infrarote) Abstrahlung des Wassers

$$(5.8) \quad H_W = E_W \sigma T_W^4 = 5.50 \cdot 10^{-8} T_W^4 \quad [\text{W m}^{-2}]$$

**H<sub>V</sub>**: Wärmeverlust des Wassers durch Verdunstung; im Prinzip könnte auch Taubildung (Wärmegewinn des Wassers) vorkommen ( $H_V$  negativ).

$$(5.9) \quad H_V = f(u, \dots) (e_w - e_A) \quad [\text{W m}^{-2}]$$

Der Sättigungsdampfdruck  $e_w$  steigt stark mit steigender Wassertemperatur (siehe Tab. 1.4).

Die Funktion  $f(u, \dots)$  berücksichtigt den Einfluss des Windes (und eventuell anderer meteorologischer Faktoren) auf die Verdunstung. Es gibt verschiedene empirische Beziehungen, z.B.

$$(5.10) \quad f(u, \dots) = 5.44 + 2.19 u_{10} + 0.24 (T_W - T_A) \quad [\text{W m}^{-2} \text{ mbar}^{-1}]$$

Der Wärmefluss durch Verdunstung  $H_V$  hängt über die Verdampfungswärme  $L$  direkt mit dem spezifischen Wasserfluss durch Verdunstung  $q_V$  zusammen:

$$(5.11) \quad H_V = L \rho q_V \quad [\text{W m}^{-2}]$$

Mit einem typischen Wert für  $L$  von  $2.5 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$  (vgl. Tab. 1.3 und 1.4) ergibt sich:

$$(5.12) \quad \begin{aligned} & q_V [\text{m s}^{-1}] = 4.0 \cdot 10^{-10} H_V [\text{W m}^{-2}] \\ \text{bzw.} & \\ & q_V [\text{mm d}^{-1}] = 35 \cdot 10^{-3} H_V [\text{W m}^{-2}] \end{aligned}$$

**H<sub>K</sub>**: Konvektion (Übergang fühlbarer Wärme vom Wasser an die Luft)

$$(5.13) \quad H_K = f^*(u, \dots) (T_W - T_A) \quad [\text{W m}^{-2}]$$

Meist wird angenommen, dass zwischen Verdunstung und Konvektion ein konstantes, nur noch vom Luftdruck abhängiges Verhältnis besteht, d.h. die Windfunktionen  $f$  und  $f^*$  zueinander proportional sind. In der Praxis hat sich eine empirische lineare Beziehung zwischen  $f$  und  $f^*$  bewährt. Das so genannte Bowen-Verhältnis lautet:

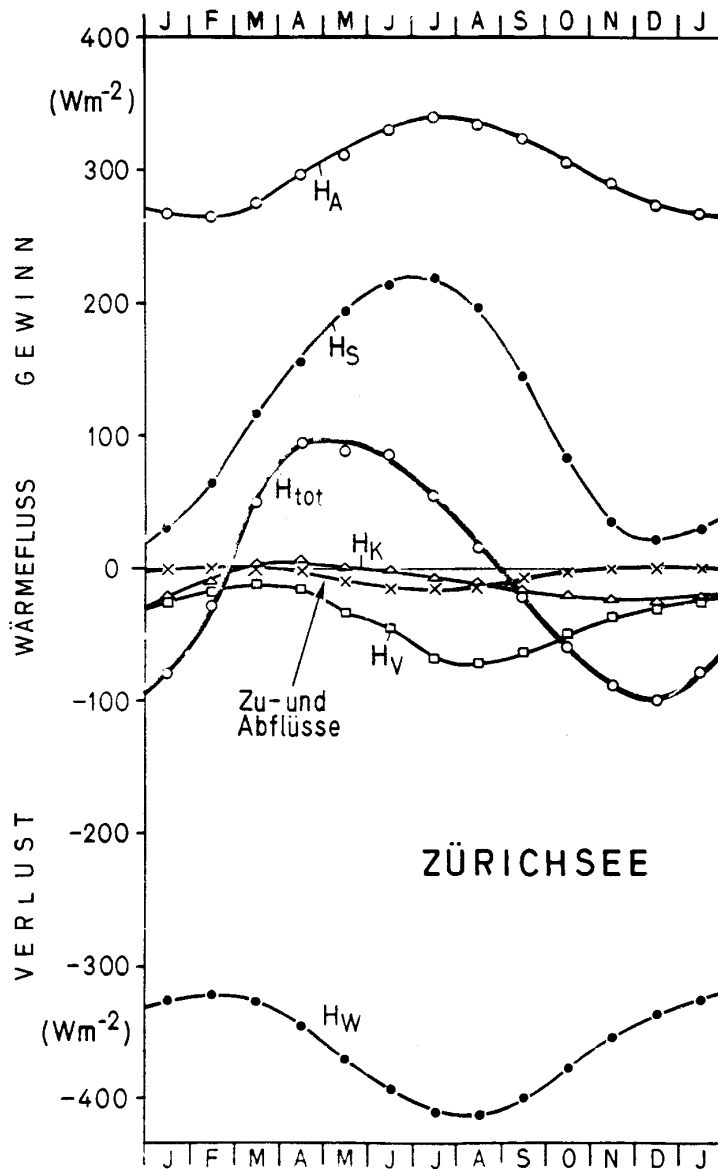
$$(5.14) \quad \frac{f^*}{f} = \text{Bo} \frac{p[\text{mbar}]}{1000 \text{ mbar}}$$

Die so genannte Bowenzahl  $\text{Bo}$  ist 0.65.

Verdunstung und Konvektion stellen Grenzschichtübergänge dar, die mit den entsprechenden Konzepten beschrieben werden können. Wir werden in Kap. 4 darauf zurückkommen.

Neben den Austauschprozessen an der Seeoberfläche kann in der Wärmebilanz auch der Effekt der Zu- und Abflüsse sowie das Schmelzen von Schnee berücksichtigt werden. Diese Prozesse sind allerdings klein im Vergleich zur dominanten langwelligen Strahlung (Abb. 5.1).

Der Beitrag des geothermischen Wärmeflusses zur Wärmebilanz von Seen ist vernachlässigbar (s. unten, Abschnitt 5.6).



**Abb. 5.1** Wärmebilanz des Zürichsees (nach Kuhn, Vierteljahresschrift Naturf. Ges. Zürich, 123, S. 261-283, 1979). Siehe Text für die Erklärung der Terme  $H_A$  etc. Der Wärmeverlust des Wassers infolge Schmelzens von Schnee ist vernachlässigbar (max.  $3 \text{ W m}^{-2}$  im Januar).

### Gleichgewichtstemperatur ( $T^*$ ) und Austauschkoeffizient ( $A$ )

Die ersten zwei Terme von Gl. (5.3), welche die Einstrahlung beschreiben, hängen nur von atmosphärischen Faktoren ab, die letzten drei, welche Prozesse der Wärmeabgabe beschreiben, auch von der Wassertemperatur  $T_W$ . Man kann somit auch schreiben:

$$(5.15) \quad H_{\text{tot}} = H_{\text{in}} - H_{\text{aus}}(T_W) \quad [\text{W m}^{-2}]$$

Zu jedem  $H_{\text{in}}$  gehört eine Wassertemperatur  $T^*$ , so dass  $H_{\text{tot}} = 0$ .  $T^*$  heißt Gleichgewichtstemperatur.

$$(5.16) \quad H_{\text{aus}}(T^*) = H_{\text{in}}$$

Für kleine Abweichungen der effektiven Wassertemperatur  $T_W$  von der (momentanen) Gleichgewichtstemperatur gilt

$$(5.17) \quad H_{\text{aus}}(T_W) = H_{\text{aus}}(T^*) + \left. \frac{dH_{\text{aus}}}{dT_W} \right|_{T^*} \cdot (T_W - T^*)$$

also

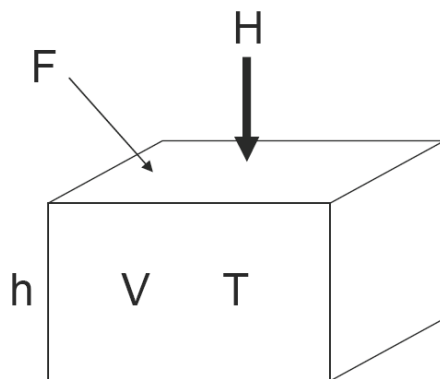
$$(5.18) \quad H_{\text{tot}}(T_W) = -A(T_W - T^*)$$

$$\text{mit } A = \left. \frac{dH_{\text{aus}}}{dT_W} \right|_{T^*} : \text{Austauschkoeffizient} \quad [\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}]$$

Der Wert des Austauschkoeffizienten  $A$  hängt insbesondere von der Temperatur und damit von der Jahreszeit ab. Ein typischer Wert im Jahresmittel ist  $25 \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-1}$ , mit höheren Werten im Sommer und tieferen Werten im Winter (s. z.B. Kuhn, Arbeitsbericht der Schweiz. Meteorol. Anstalt No. 70, 1977).

## 5.2 Der Wärmehaushalt von Fließgewässern und Seen

Mit Hilfe der im letzten Abschnitt eingeführten Konzepte lässt sich die Wärmebilanz eines gut durchmischten Wasserkörpers einfach berechnen. Wir betrachten dazu zunächst konzeptionell ein Wasservolumen  $V$ , dessen einzige Wärmequelle ein Fluss  $H$  durch die Oberfläche  $F$  ist, und in dem die Wärme stets homogen verteilt ist, so dass eine räumliche konstante Temperatur  $T$  herrscht (Abb. 5.2).



**Abb. 5.2** Wasservolumen mit Wärmefluss durch die Oberfläche.

Die Änderung des Wärmeinhaltes  $Q_{th}$  und damit der Temperatur ist gegeben durch:

$$(5.19) \quad \frac{dQ_{th}}{dt} = V\rho c_p \frac{dT}{dt} = FH \quad [J s^{-1}]$$

Daraus folgt für die Temperaturänderung:

$$(5.20) \quad \frac{dT}{dt} = \frac{F}{V} \frac{H}{\rho c_p} = \frac{1}{h} \frac{H}{\rho c_p} \quad [K s^{-1}]$$

(mit  $\rho$ ,  $c_p$ : Dichte bzw. spez. Wärme des Wassers;  $\rho c_p = 4.19 \cdot 10^6 J m^{-3} K^{-1}$ )

Man beachte, dass die Temperaturänderung invers proportional zur Tiefe  $h$  des Wasservolumens ist. Das Verhältnis von Volumen zu Oberfläche,  $h = V/F$ , das in natürlichen Gewässern der mittleren Tiefe entspricht, ist immer dann wichtig, wenn eine im Volumen verteilte Eigenschaft (Temperatur, Stoffkonzentration) durch einen Oberflächenfluss verändert wird. Wir werden das auch später beim Gasaustausch (Kap. 5) wieder sehen.

Setzt man nun die lineare Näherung für den Wärmefluss (Gl. 5.18) ein, ergibt sich eine einfache Differentialgleichung für  $T$  (der Index  $W$  für die Wassertemperatur wird im Folgenden weggelassen):

$$(5.21) \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{A}{h\rho c_p} (T - T^*) \quad [K s^{-1}]$$

Mit der Anfangswassertemperatur  $T(0) = T_0$  hat diese Gleichung die Lösung

$$(5.22) \quad (T(t) - T^*) = (T_0 - T^*) \cdot e^{-k_A t} = (T_0 - T^*) \cdot e^{-t/t_A} \quad [^{\circ}C]$$

mit der Austauschrate  $k_A = \frac{A}{h \cdot \rho \cdot c_p}$ , bzw. der Austauschzeit  $t_A = \frac{1}{k_A} = \frac{h \cdot \rho \cdot c_p}{A}$

Diese Lösung besagt, dass sich die Wassertemperatur stets exponentiell an die aktuelle Gleichgewichtstemperatur  $T^*$  annähert. Dies folgt direkt aus der linearen Näherung für den Wärmefluss als Funktion von  $T$ . Die Geschwindigkeit der Annäherung ist gegeben durch die Austauschrate  $k_A$ , welche proportional zum Austauschkoefizienten  $A$  und invers proportional zur mittleren Tiefe  $h$  ist.

Die Austauschzeit  $t_A$ , das inverse der Austauschrate, gibt an, in welcher Zeit die Abweichung von der Gleichgewichtstemperatur auf den Anteil  $1/e = 0.37$  abklingt. Als Beispiel ergibt sich mit  $A = 25 W m^{-2} K^{-1}$  (vgl. Abb. 5.3) und  $h = 1 m$  eine Austauschzeit von  $1.7 \cdot 10^5 s$  oder knapp 2 Tagen. Der Wärmeaustausch ist also selbst für eine seichte Wasserschicht von 1 m Tiefe ein recht langsamer Prozess.

### Fließgewässer

In den meisten Bächen und Flüssen ist die Turbulenz genügend groß, um über den Fließquerschnitt ständig konstante Temperaturen zu erzeugen. Deshalb lässt sich mit Gl. (5.21) direkt die Temperaturveränderung eines fließenden Wasserpaketes infolge Wärmeaustausches an der Wasseroberfläche beschreiben. Für kurze Zeiten können  $A$  und  $h$  als konstant angenommen werden. Dann ist auch die Lösung Gl. (5.22) gültig.

Unter der Annahme einer konstanten Fließgeschwindigkeit lässt sich die durch Gl. (5.22) gegebene zeitliche Entwicklung der Temperatur in eine räumliche Verteilung umschreiben. Die vom Wasser während der Zeit  $t$  zurückgelegte Strecke ist  $x = v \cdot t$ . Die Geschwindigkeit  $v$  ergibt sich aus der Wasserführung  $Q$  [ $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ] und der Querschnittsfläche  $b \cdot h$  ( $b$ : Breite,  $h$ : mittl. Tiefe) des Flusses zu  $v = Q/(b \cdot h)$ . Es folgt anstelle von Gl. (5.22):

$$(5.23) \quad (T(x) - T^*) = (T_0 - T^*) \cdot e^{-x/x_A} \quad [^\circ\text{C}]$$

$$\text{mit der Austauschstrecke } x_A = \frac{Q}{b \cdot h} t_A = \frac{Q \cdot \rho \cdot c_p}{b \cdot A}$$

Analog zu  $t_A$  ist  $x_A$  jene Strecke, nach der eine anfänglich zur Gleichgewichtstemperatur vorhandene Differenz auf den Anteil  $1/e$  gefallen ist. Mit Fließgeschwindigkeiten um ca. 1 m/s können Austauschstrecken durchaus einige hundert km betragen.

Die Temperaturen in den Fließgewässern sind wegen der relativ langsam ablaufenden Austauschprozesse und der sich ständig ändernden Gleichgewichtstemperaturen fast nie identisch mit  $T^*$  (siehe Abb. 5.3).

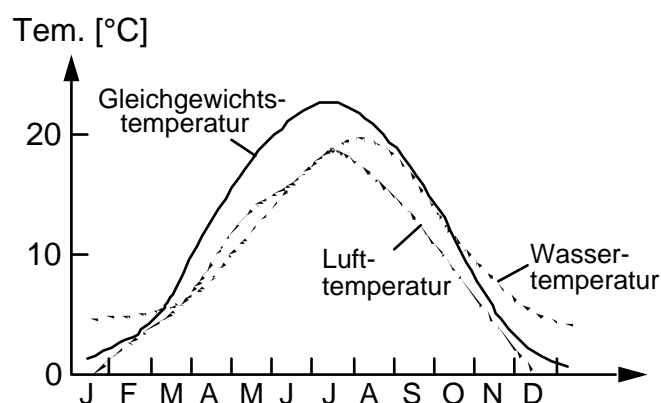


Abb. 5.3 Verlauf von Wasser-, Luft- und Gleichgewichtstemperatur im Rhein bei Rheinfelden

### Seen

In stehenden Gewässern gilt die für die Flüsse gemachte Feststellung über die homogene Temperaturverteilung nicht. Nur in sehr seichten Gewässern (Teiche etc., Tiefe weniger als 2 m) kann der Wind regelmäßig die ganze Wassersäule durch-

mischen. Die obigen, einfachen Zusammenhänge sind somit nur begrenzt gültig. Im einfachsten Fall kann man nur das Epilimnion als durchmischte Oberflächenschicht betrachten, unter der Annahme, dass der Wärmeaustausch durch die Thermokline vernachlässigbar ist. Dann gelten wieder die Gl. (5.21) und (5.22), wobei  $h$  die Dicke des Epilimnions darstellt.

Zu beachten ist dabei allerdings auch, dass nicht unbedingt der gesamte Strahlungsfluss im Epilimnion absorbiert wird. Bekanntlich ist Wasser durchsichtig, also im sichtbaren Spektralbereich recht durchlässig für Strahlung (im Gegensatz zum infraroten Spektralbereich). Der kurzwellige Strahlungsfluss  $H_s$  schwächt sich somit mit der Tiefe  $z$  gemäß dem Lambert-Beer'schen Absorptionsgesetz ab:

$$(5.24) \quad H_s(z) = H_s(0) \cdot e^{-\alpha z} \quad [W \text{ m}^{-2}]$$

Der Absorptionskoeffizient  $\alpha$  kann dabei in einem weiten Bereich variieren, zwischen ca.  $0.05 \text{ m}^{-1}$  für sehr klares Wasser bis zu weit über  $1 \text{ m}^{-1}$  für trübe Gewässer. Er ändert sich auch zeitlich, da z.B. saisonale Algenblüten die Durchlässigkeit verringern. Wenn die Eindringtiefe des Lichtes ( $1/\alpha$ ) nicht deutlich kleiner als die Epilimniondicke ist, wird ein Teil der kurzwelligen Strahlungsenergie direkt in die Thermokline bzw. das Hypolimnion eingetragen. Die Strahlungsbilanz des Epilimnions muss dann entsprechend angepasst werden.

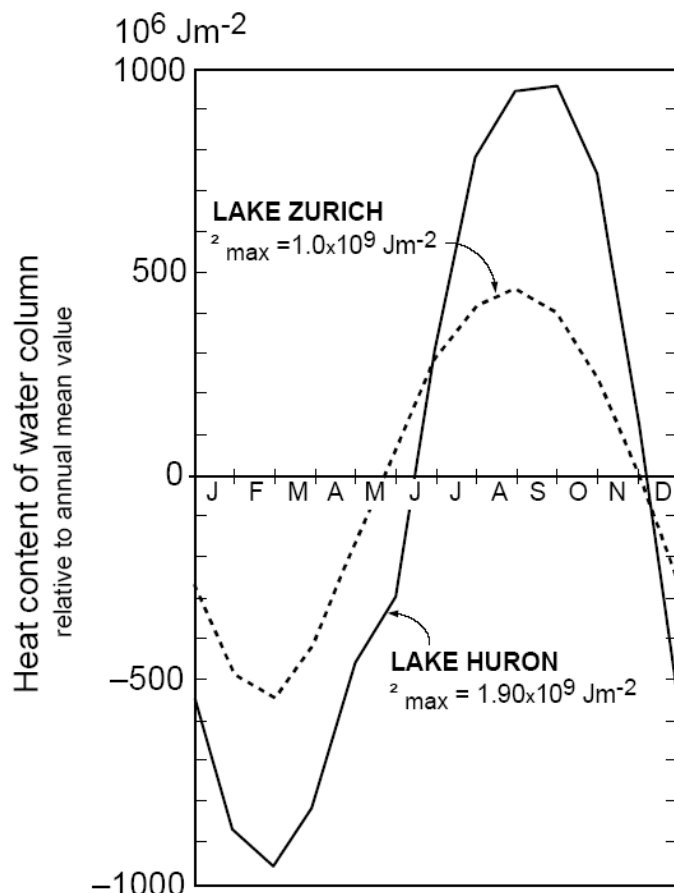
Somit ist es für Seen im Allgemeinen nicht möglich, den Wärmefluss (Gl. 5.3 oder 5.18) direkt mit der Temperaturveränderung an der Seeoberfläche (analog zu Gl. 5.21) in Verbindung zu setzen. Wie stark die Seeoberfläche aufgeheizt wird, hängt u.a. davon ab, wie viel der eingetragenen Wärme in die tieferen Wasserschichten transportiert wird. Für diesen Prozess ist die vertikale Mischung verantwortlich, die wiederum vor allem vom Wind abhängt. Eine quantitative Betrachtung ist erst in Kap. 4 möglich.

Die jahreszeitliche Temperaturveränderung im See haben wir in Kap. 2.3 bereits qualitativ betrachtet. Hier folgt nun eine quantitativere Analyse der Wärmeinhalte von Seen und ihrer Veränderung im Laufe des Jahres.

Obschon in den meisten Seen nur die obersten 20 bis 30 m von den saisonalen Temperaturschwankungen spürbar beeinflusst sind (vgl. Abb. 1.6 und 1.7), werden jährlich beachtliche Energiemengen zwischen Wasser und Luft ausgetauscht.

Zwischen dem Zeitpunkt seines kleinsten Wärmeinhaltes im März und dem Maximum im September gewinnt z. B. der Zürichsee pro Quadratmeter Oberfläche ungefähr  $10^9 \text{ J}$  an thermischer Energie (Abb. 5.4). Größere Seen haben infolge der stärkeren Windmischung eine dickere durchmischte Schicht, welche sich im Sommer erwärmt. Entsprechend ist z.B. im Lake Huron die Amplitude des Wärmeinhaltes etwa doppelt so groß wie im Zürichsee (Abb. 5.4).

Um in einem halben Jahr  $10^9 \text{ J m}^{-2}$  an Energie zuzuführen, muss ein durchschnittlicher Wärmefluss von  $66 \text{ W m}^{-2}$  herrschen. Nimmt man einen solchen Wärmefluss für den Bodensee mit einer Fläche von  $537 \text{ km}^2$  an, erhält man einen totalen saisonalen Wärmefluss von ca. 35 GW. Das entspricht ca. 1/3 des jährlichen Stromverbrauch Deutschlands.



**Abb. 5.4** Jahreszeitliche Veränderung des Wärmehaltes einer Wassersäule von 1 m<sup>2</sup> Grundfläche im Zürichsee bzw. Lake Huron.

### Beeinflussung des natürlichen Wärmehaushaltes durch die Nutzung

Die verschiedensten Eingriffe verändern seit langem den natürlichen Temperaturhaushalt der Gewässer. Vor unserem Jahrhundert waren es vor allem Gewässer-Korrekturen (Flussverbauungen, Umleitung von Flüssen in Seen). Im 20. Jahrhundert begannen die Gewässer eine ständig wachsende Rolle in der Energieproduktion zu spielen.

#### Wasserkraftwerke

Veränderung der Temperaturübergänge zwischen Luft und Wasser durch künstliche Stauhaltung, Stollenbau etc. Der direkte Effekt (fehlende Erwärmung via Reibung, falls Wasser im Kraftwerk genützt wird) ist klein:  $2.3 \cdot 10^{-3} \text{ °C}$  pro Meter Höhenunterschied.

#### Wärmeeintrag via Kühlwasser, Wärmeentzug für Wärmepumpen

In Seen müssen Eintrag bzw. Entzug von Wärme mit den natürlichen Wärmeflüssen verglichen werden. Allgemeine Aussagen über den Zusammenhang zwischen künstlichen Wärmeveränderungen und erzeugten Temperaturveränderungen sind nicht möglich: Ort, Art und Zeitpunkt spielen via Mischungsvorgänge eine entscheidende Rolle für die "Ausbreitung" der Temperaturstörung.

In Flüssen sind wegen der einfacheren Mischungsverhältnisse die Zusammenhänge berechenbar: Wird pro Zeit und Flusslaufänge die Wärmemenge  $J$  eingeleitet (bzw. entnommen, falls  $J < 0$ ), so folgt in Anlehnung an Gl. (5.21):

$$(5.25) \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{bA}{Q\rho c_p}(T - T^*) + \frac{J}{Q\rho c_p} \quad [\text{K m}^{-1}]$$

mit  $J$  [ $\text{W m}^{-1}$ ]: Wärmeinput pro Zeit und Lauflänge

Die neue (gestörte) Gleichgewichtstemperatur ( $dT/dt = 0$ ) wäre gegenüber der ungestörten  $T^*$  um den Betrag  $\Delta T$  verschoben:

$$(5.26) \quad \Delta T = \frac{J}{b \cdot A}$$

### Der geothermische Wärmefluss

Der geothermische Wärmefluss als Folge der Abkühlung des Erdinnern und der radiogenen Wärmeproduktion beträgt im globalen Mittel ca.  $0.09 \text{ W m}^{-2}$ , kann aber lokal recht stark variieren. Damit ist dieser Wärmeeintrag in die Gewässer für die totale Wärmebilanz im Vergleich zu den Flüssen an der Oberfläche absolut vernachlässigbar (vgl. Abb. 5.1).

Da der geothermische Wärmefluss jedoch als einziger von unten her wirkt, kann er am Grund von Seen oder Ozeanbecken durchaus eine Rolle spielen. In meromiktischen, chemisch stratifizierten Seen oder Depressionen im Ozean kann die Temperatur in Bodennähe deutlich ansteigen. Einige Beispiele für solche Temperaturinversionen am Grund sind:

- der Luganersee, mit einem Temperaturanstieg um  $0.07 \text{ }^\circ\text{C}$  zwischen 140 m Tiefe und dem Seegrund in 288 m Tiefe im Jahr 1990 (Wüest et al., 1992, Aquat. Sci. 54, 205-218).
- der Lac Pavin, ein vulkanischer Kratersee in Frankreich, mit einem permanenten Temperaturanstieg um ca.  $1 \text{ }^\circ\text{C}$  zwischen 60 m Tiefe und dem Seegrund in 90 m Tiefe (Aeschbach-Hertig et al., 2002, Hydrobiol. 487, 111-136).
- das Solebecken "Atlantis II Deep" im Roten Meer, mit einem Temperaturanstieg um  $45 \text{ }^\circ\text{C}$  (!) zwischen 1900 m Tiefe und dem Meeresgrund in 2200 m Tiefe (Winckler et al., 2001, Earth Planet. Sci. Lett. 184, 671-683).

In solchen Fällen kann unter der Annahme von stationären Verhältnissen der geothermische Wärmefluss  $F_{\text{geo}}$  mit dem vertikalen Temperaturgradienten durch die Wärmeleitfähigkeitsgleichung (vgl. Gl. 1.1 und 1.2) in Verbindung gesetzt werden:

$$(5.27) \quad F_{\text{geo}} = -\rho c_p D_T \frac{\partial T}{\partial z} \quad [\text{W m}^{-2}]$$

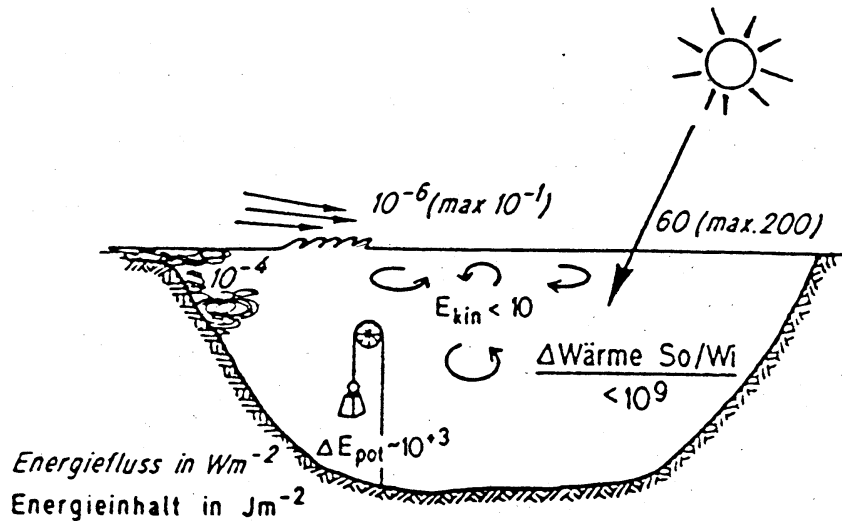
Falls die turbulente Mischung (s. Kap. 3) durch die Schichtung sehr stark unterdrückt ist, kann für  $D_T$  die molekulare Wärmediffusivität eingesetzt werden. Andernfalls kann bei bekanntem  $F_{geo}$  aus (5.27) die turbulente Diffusivität bestimmt werden.

### 5.3 Energieinhalte und Energieflüsse im See

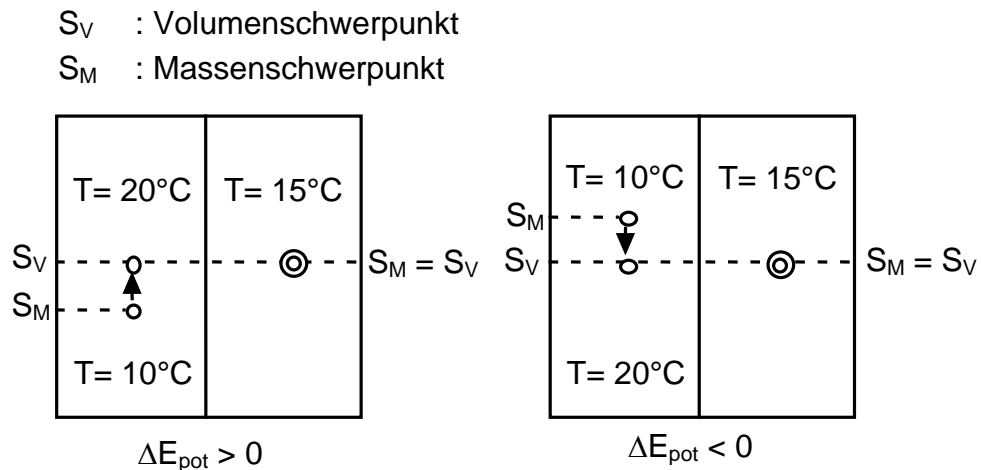
Auf ein Oberflächengewässer wirken sowohl *thermische* als auch *mechanische* Energieflüsse. Für stehende Gewässer (Seen) sind die wichtigsten mechanischen "Energieförderer" der Wind und die Zuflüsse. In Fließgewässern kommt die potentielle Energie dazu, welche in kinetische Energie umgewandelt wird, wenn der Fluss entlang seines geneigten Bettes zu Tale fließt. Wir beschäftigen uns hier mit mechanischen Energieflüssen in Seen. Wenn diese auch um einige Zehnerpotenzen kleiner sind als der Wärmefluss (sie erreichen bei einem starken Sturm kaum je ein Watt pro  $m^2$  (Abb. 5.5), so stellen sie doch geordnete Bewegungen dar, welche Stoffe und Wärme im See über größere Distanzen transportieren, die Partner für die chemischen und biologischen Prozesse zusammenführen und via Oberflächentemperatur den thermischen Energiehaushalt indirekt mit beeinflussen.

Der *mechanische Energieinhalt* umfasst erstens das gesamte Spektrum von Bewegungsenergien (*kinetische Energie*), angefangen bei den großräumigen Strömungen über lokale Wirbel bis hinunter zur kleinräumigen Turbulenz. Auch die Energie der Oberflächen- und internen Wellen ist dazu zu zählen. Zweitens gehört zum mechanischen Energiefluss die Veränderung der *potentiellen Energie* der Wassermassen, wie sie entweder als Folge der homogenen Dichteveränderung einer Wassermasse (Ausdehnung bzw. Kontraktion) oder als Folge vertikaler Mischung in einem geschichteten Medium auftritt.

Als Beispiel für den zweiten Prozess stelle man sich eine Wassersäule der Höhe  $h$  vor, welche je zur Hälfte aus Wasser der Temperatur von  $10^\circ\text{C}$  (unten) und  $20^\circ\text{C}$  (oben) besteht (Abb. 5.6a). Infolge der Konzentrierung des schweren ( $10^\circ\text{C}$ ) Wassers in der unteren Hälfte liegt der Massenschwerpunkt  $S_M$  unterhalb des Volumenschwerpunktes  $S_V$ . Wird die Wassersäule vollständig durchmischt, so steigt  $S_M$  der jetzt durchgehend  $15^\circ\text{C}$  warmen Wassermasse auf die Höhe  $S_V$  an: Als Folge der Durchmischung hat sich die potentielle Energie der Wassermasse vergrößert; die entsprechende Energie ist dem kinetischen Energieinhalt entzogen worden. Befindet sich hingegen zu Beginn das kältere (also schwerere) Wasser in der oberen Schicht - etwa als Folge einer Abkühlung an der Oberfläche - so liegt  $S_M$  über  $S_V$  (Abb. 5.6b). Die Durchmischung läuft spontan ab, wobei sich die frei werdende potentielle Energie in kinetische Energie (Konvektion, Turbulenz) umwandelt.



**Abb. 5.5:** Typische Größe von Energieinhalt und -flüssen in einem See. Die thermische Energievariation ( $\Delta E_{th}$ ) bedeutet die jährliche Wärmeinhalts-Variation zwischen Sommer und Winter (vgl. Kapitel 2). In Salzseen kann die in der Schichtung enthaltene potentielle Energie  $E_{pot}$  um 2 bis 3 Zehnerpotenzen größer sein als der hier angegebene Wert.



**Abb. 5.6:** a) Veränderung der potentiellen Energie ( $\Delta E_{pot}$ ) als Folge der vertikalen Durchmischung einer stabil geschichteten Wassermasse. b)  $\Delta E_{pot}$  als Folge der spontanen Durchmischung einer instabilen Wassermasse. Beachte: Wegen der besonderen Form der Zustandsgleichung  $\rho(T)$  gilt  $\rho(\bar{T}) > \bar{\rho}$ , d. h. das totale Volumen nimmt beim Mischungsprozess ab. Der Volumenschwerpunkt  $S_V$  wandert somit nach unten, so dass die Veränderung der potentiellen Energie (quantifiziert durch die Differenz  $S_V - S_M$ ) in Wirklichkeit kleiner ist als in obiger Darstellung.

Die Dichte von Wasser hängt in nichtlinearer Weise von der Temperatur ab. Mischt man zwei gleich große Wassermassen unterschiedlicher Temperatur, hat das Mischwasser zwar eine dem Mittelwert entsprechende Temperatur, nicht aber die mittlere Dichte. (Beispiel: Wasser von 2°C und 6°C hat ungefähr gleiche Dichte; die Dichte des Mischwassers (4°C) ist aber größer als diejenige beider Ausgangsmassen!). Daher ist es nicht trivial, die mit einem endlichen Mischungsereignis verbundene Veränderung der potentiellen Energie,  $\Delta E_{\text{pot}}$ , zu berechnen.

Für den Fall einer homogenen Dichteänderung der Größe  $\Delta\rho$  sind die Verhältnisse einfacher. Wir betrachten eine homogene Wassersäule der Tiefe  $h_{\text{mix}}$  und berechnen  $\Delta E_{\text{pot}}$  pro Fläche für eine Dichteänderung  $\Delta\rho$ . Da die Masse nicht ändert, gilt  $h_{\text{mix}}\rho = m = \text{const.}$  ( $m$ : Masse pro Fläche), also

$$(5.28) \quad \frac{\Delta h_{\text{mix}}}{h_{\text{mix}}} = -\frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Falls die Tiefe der Wassermasse sich um  $\Delta h_{\text{mix}}$  ändert, verschiebt sich der Massenschwerpunkt entsprechend um  $\Delta h_{\text{mix}}/2$ . Also ist mit Gl. (5.28) die Änderung der potentiellen Energie der Wassersäule (Energie pro Fläche,  $m^* = m/A$ ):

$$(5.29) \quad \Delta E_{\text{pot}} = m^* g \frac{\Delta h_{\text{mix}}}{2} = -\frac{1}{2} g h_{\text{mix}}^2 \Delta\rho \quad [\text{J m}^{-2}]$$

Ändert sich nun die Dichte mit der Zeit, so ist die entsprechende Änderung der potentiellen Energie (pro Fläche):

$$(5.30) \quad \frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = -\frac{1}{2} g h_{\text{mix}}^2 \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{2} \rho h_{\text{mix}} J_b^0 \quad [\text{W m}^{-2}]$$

$J_b^0$  ist der sogenannte *Oberflächenauftriebsfluss*, d.h. (bis auf den Faktor 2) die Veränderungsrate der potentiellen Energie pro Wassermasse in der Oberflächenschicht:

$$(5.31) \quad J_b^0 = -\frac{2}{\rho h_{\text{mix}}} \frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = \frac{g h_{\text{mix}}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad [\text{W kg}^{-1}]$$

Das Vorzeichen von  $J_b^0$  wurde so gewählt, dass ein positives  $J_b^0$  mit einer Abnahme (Freisetzung) von potentieller Energie verbunden ist.

Falls sich  $\rho$  aufgrund der Temperaturveränderung als Folge eines Wärmeflusses an der Oberfläche,  $H_{\text{tot}}$ , ändert, so gilt:

$$(5.32) \quad \frac{d\rho}{dt} = -\alpha \rho \frac{dT}{dt} = -\frac{\alpha}{c_p h_{\text{mix}}} H_{\text{tot}}$$

mit  $c_p$ : spezifische Wärme von Wasser bei konstantem Druck

Einsetzen in (5.30) bzw. (5.31) ergibt:

$$(5.33a) \quad \frac{dE_{\text{pot}}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\alpha g h_{\text{mix}}}{c_p} H_{\text{tot}} \quad [\text{W m}^{-2}]$$

$$(5.33b) \quad J_b^o = -\frac{\alpha g}{\rho c_p} H_{\text{tot}} \quad [\text{W kg}^{-1}]$$

Ein Teil des an der Wasseroberfläche einfallenden Wärmeflusses  $H_{\text{tot}}$  wird also gemäß (5.33a) tatsächlich für eine Erhöhung der potentiellen Energie verwendet. Allerdings ist der relative Anteil sehr gering:

$$(5.34) \quad \eta = \frac{\left( \frac{dE_{\text{pot}}}{dt} \right)}{H_{\text{tot}}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha g h_{\text{mix}}}{c_p}$$

Für  $h_{\text{mix}} = 10 \text{ m}$ ,  $\alpha = 2.1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  (entspricht  $T = 20^\circ\text{C}$ ),  $c_p = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , ergibt sich  $\eta = 2.5 \cdot 10^{-6}$ .

Auch die interne Umlagerung von Wassermassen verschiedener Dichten hat einen potentiellen Energiefluss zur Folge. Betrachten wir noch einmal das Austauschmodell in Abb. 5.1 und benützen zur Charakterisierung die Dichte  $\rho$  anstelle der Konzentration  $C$ . Der Dichtefluss eines Austauschprozesses ist (vgl. Gl. 4.7)

$$(5.35) \quad F_\rho = -\frac{Q_{\text{ex}}}{A} L \frac{\partial \rho}{\partial z} = -K_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad [\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}]$$

Die entsprechende Veränderung der potentiellen Energie pro Wassermasse ist

$$(5.36) \quad J_b = -\frac{g}{\rho} F_\rho = +K_z \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -K_z N^2 \quad [\text{W kg}^{-1}]$$

mit der Brunt-Väisälä-Frequenz: 
$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

**Anmerkung:** Wegen der Orientierung der z-Achse (positiv aufwärts) ist der Dichtegradient für eine stabile Schichtung negativ, d.h. es gilt  $N^2 > 0$  und  $J_b < 0$ .

$J_b$  ist der so genannte (volumetrische) Auftriebsfluss. Das Vorzeichen ist wiederum so gewählt, dass ein positiver  $J_b$ -Wert die Umsetzung von potentieller in kinetische Energie bezeichnet. Die Brunt-Väisälä-Frequenz  $N^2$  (siehe Kapitel 2, Gl. 2.29, sowie Tab. 2.4 für typische Werte) ist ein Maß für die Stärke der Schichtung. Der am Anfang des Abschnitts 4.2 erörterte Zusammenhang zwischen diapynischer Mischung und Änderung der potentiellen Energie wird hier konkretisiert. Im Abschnitt 5.4 diskutieren wir die Folgen dieses Zusammenhanges für die Größe von  $K_z$ .

Im oben diskutierten Fall der Änderung der potentiellen Energie durch interne Mischung (Turbulenz) wird effektiv die in den Wirbeln steckende kinetische Energie (turbulente kinetische Energie, TKE) in potentielle Energie umgewandelt. Die Rate der Abnahme (Dissipation) der TKE wird üblicherweise durch die Größe  $\varepsilon$  beschrieben, offensichtlich muss ein Zusammenhang mit der durch  $J_b$  beschriebenen Änderungsrate der potentiellen Energie bestehen:

$$(5.37) \quad J_b = -\gamma_{\text{mix}} \varepsilon \quad \text{mit} \quad \varepsilon \equiv -\frac{d(\text{TKE})}{dt}$$

Der Faktor  $\gamma_{\text{mix}}$  wird als Mischungseffizienz bezeichnet und gibt an, welcher Anteil der TKE in potentielle Energie umgewandelt wird. Empirisch wurde gefunden, dass  $\gamma_{\text{mix}}$  je nach Mischungsprozess zwischen 0.05 und 0.25 liegt. Die Kombination von (5.36) und (5.37) ergibt einen Zusammenhang zwischen  $\varepsilon$  und  $K_z$  bzw.  $N^2$ :

$$(5.38) \quad \gamma_{\text{mix}} \varepsilon = K_z N^2$$

Der wichtigste Motor für den Eintrag von *kinetischer Energie* in einen See ist der Wind. Dieser erzeugt an der Wasseroberfläche eine *Schubspannung*  $\tau_0$  (Kraft pro Fläche parallel zur Wasseroberfläche). Die Schubspannung ist innerhalb einer bestimmten Grenzschicht, welche sich von der Wasseroberfläche sowohl in die Luft als auch ins Wasser erstreckt, konstant. Es ist schwierig,  $\tau_0$  direkt zu messen. Üblicherweise wird  $\tau_0$  mittels der horizontalen Windgeschwindigkeit  $W_{10}$  (10 m oberhalb der Wasseroberfläche gemessen) parametrisiert:

$$(5.39) \quad \tau_0 = \rho_L C_{10} W_{10}^2 \quad [\text{N m}^{-2}]$$

mit  $\rho_L$ : Dichte von Luft ( $\sim 1.2 \text{ kg m}^{-3}$  bei  $20^\circ\text{C}$ )  
 $C_{10}$ : Windschubkoeffizient (dimensionslos)

$C_{10}$  liegt typischerweise zwischen 0.001 ( $W_{10} < 7 \text{ m s}^{-1}$ ) und 0.0025 ( $W_{10} > 20 \text{ m s}^{-1}$ ) und erreicht für größere  $W_{10}$ -Werte eine Sättigung. Der Windschub  $\tau_0$  bewirkt einen Fluss von kinetischer Energie von der Atmosphäre ins Wasser. Dieser ist 10 m oberhalb der Wasseroberfläche gegeben durch

$$(5.40) \quad P_{10} = \tau_0 W_{10} = \rho_L C_{10} W_{10}^3 \quad [\text{W m}^{-2}]$$

Von  $P_{10}$  wird nur der kleine relative Anteil  $\chi$  von 1% bis 2% als kinetische Energie  $P_{\text{kin}}^W$  ins Wasser eingetragen, der Rest geht in der Schicht konstanter Schubspannung via Reibung als mechanische Energie verloren:

$$(5.41) \quad P_{\text{kin}}^W = \chi \rho_L C_{10} W_{10}^3 = \eta_W W_{10}^3 \quad [\text{W m}^{-2}]$$

Der Koeffizient  $\eta_W = \chi \rho_L C_{10}$  liegt typischerweise zwischen  $1 \cdot 10^{-5}$  und  $5 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-3}$ .

## 5.4 Geschichtete Wassersäule: Energie, Stabilität und Turbulenz

Turbulente Mischung in einem stabil geschichteten Medium ist mit Produktion von potentieller Energie verbunden. Die Energieproduktion pro Zeit und Masse ist der bereits im vorherigen Abschnitt (Gl. 5.40) besprochene Auftriebsfluss  $J_b$ . Entsprechend ist die Energieproduktion pro Volumen:

$$(5.42) \quad W_{\text{pot}} = g F_{\rho} = -g K_z \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_{\text{stab}} \quad [\text{W m}^{-3}]$$

$$\text{mit } F_{\rho} = -K_z \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_{\text{stab}} : \text{ turbulenter Massenfluss} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \text{ s}^{-1}]$$

Der Auftriebsfluss  $J_b$  beschreibt den Beitrag der potentiellen Energieveränderung an die Produktion von turbulenter kinetischer Energie (TKE). Turbulente Mischung in einem stabil geschichteten Medium ist mit einem negativen Auftriebsfluss verbunden; dem turbulenten Strömungsfeld wird Energie entzogen. Für den Fall einer instabil geschichteten Wassersäule ( $N^2 > 0$ ) ist der Auftriebsfluss positiv; die Turbulenz wird durch die frei werdende potentielle Energie angetrieben (*konvektive Turbulenz*). Für den Fall der turbulenten Mischung im geschichteten Medium ( $J_b < 0$ ) stellt sich die Frage, inwieweit die Produktion von potentieller Energie dem turbulenten kinetischen Energiefeld soviel Energie zu entziehen vermag, dass schließlich die Turbulenz verschwindet. Die dimensionslose, so genannte *Gradienten Richardson-Zahl*  $R_i$

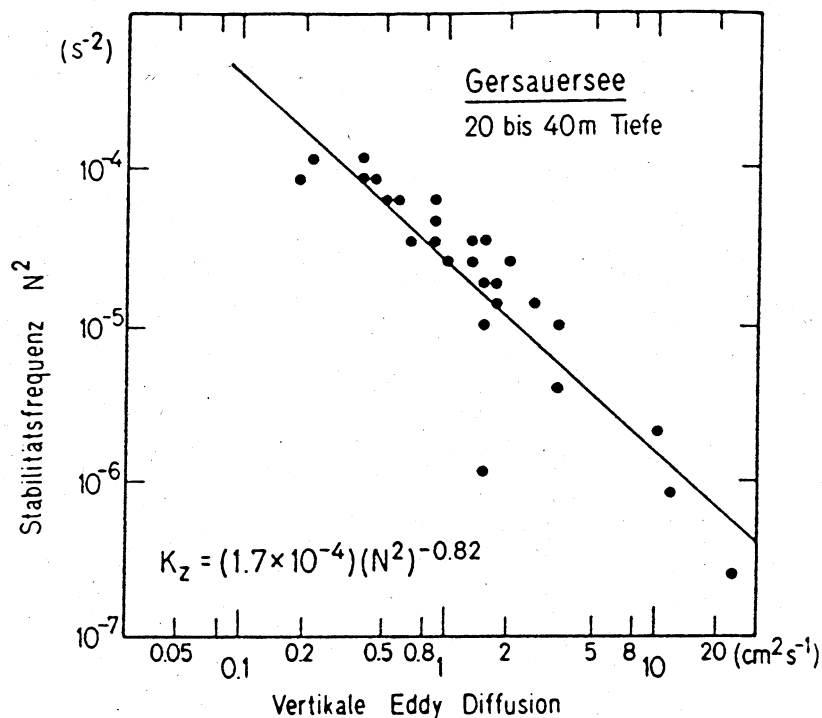
$$(5.43) \quad R_i = \frac{N^2}{(\partial u / \partial z)^2} \quad [-]$$

ist ein Maß für die relative Stärke von Schichtung (ausgedrückt durch die Stabilitätsfrequenz  $N^2$ ) und Produktion turbulenter kinetischer Energie (TKE), ausgedrückt durch das Quadrat des vertikalen Geschwindigkeitsgradienten  $(\partial u / \partial z)^2$ . Überschreitet  $R_i$  einen gewissen kritischen Wert, wird Turbulenz nicht auftreten. Mit andern Worten: Je stärker die Schichtung, desto größer die tolerierbaren Geschwindigkeitsgradienten, ohne dass es zu Turbulenz kommt.

Der bereits zu Beginn von Kap. 4.2 erwähnte inverse Zusammenhang zwischen der Stärke der Schichtung ( $N^2$ ) und der vertikalen turbulenten Diffusion ( $K_z$ ) lässt sich also als Funktion der Gradienten Richardson-Zahl  $R_i$  darstellen. Da aber die Messung des Geschwindigkeitsgradienten *in situ* aufwändig ist und dementsprechend nur wenige Daten vorhanden sind, wird oft der (rudimentärere) Zusammenhang zwischen  $K_z$  und  $N^2$  untersucht, etwa in der Form

$$(5.44) \quad K_z = a \cdot (N^2)^{-b}$$

Der empirische Parameter  $b$  liegt typischerweise zwischen 0.5 und 1, der Parameter  $a$  beschreibt das allgemeine "Turbulenz-Niveau". Der Ansatz basiert auf theoretischen Überlegungen von P. Welander, wonach  $R_i$  in einfacher Art von  $N^2$  abhängt. In Abb. 5.7 ist als Beispiel die Anwendung von Gl. (5.44) auf den Gersauersee (Becken des Vierwaldstättersees) dargestellt.



**Abb. 5.7:** Korrelation zwischen Stabilitätsfrequenz  $N^2$  und vertikaler Diffusion  $K_z$  im Gersauersee nach Gl. (5.44).

In einer etwas anderen, aber oft sehr nützlichen Betrachtungsweise wird das Verhältnis der relevanten Energieflüsse an der *Wasseroberfläche* verglichen. Wie wir bereits gesehen haben, ist die Ausdehnung der Wasserschicht der Dicke  $h_{mix}$  mit einer Veränderung der potentiellen Energie verbunden. Diese kann gemäß Gl. (5.31) durch den Oberflächenauftriebsfluss  $J_b^0$  ausgedrückt werden, wobei in Anlehnung an die Definition von  $J_b$  (Gl. 5.36) das Vorzeichen von  $J_b^0$  so gewählt ist, dass die Abnahme von potentieller Energie ( $dp/dt > 0$ ) mit einem positiven Auftriebsfluss verbunden ist. Der konkurrenzierende Energiefluss, d.h. jener Fluss, der allfällig produzierte Schichtungen zerstört, wird durch den Input von kinetischer Energie durch das Windfeld ausgedrückt. Nach Gl. (5.40) ist dieser Beitrag proportional zur dritten Potenz der Windgeschwindigkeit  $W_{10}$ . Normieren wir diesen Energiefluss ebenfalls auf die Wassermasse, so können wir folgende dimensionslose Zahl definieren:

$$(5.45) \quad R_{fi} = \frac{\frac{dE_{pot}}{dt}}{P_{kin}^W} = -\frac{1}{2} \frac{\rho h_{mix} J_b^0}{P_{kin}^W} \quad [-]$$

$R_{fi}$  ist - bis auf einen numerischen Faktor - die so genannte *Integrale Flux Richardson Zahl*. Sie ist positiv für  $J_b^0 < 0$ , d.h. falls  $d\rho/dt < 0$  ist.

$R_{fi}$  ist ein Maß für die relative Stärke der schichtungserhaltenden Kraft im Vergleich zum schichtungszerstörenden Einfluss. Bei gegebenem Auftriebsfluss  $J_b^0$  und Windgeschwindigkeit  $W_{10}$  hängt  $R_{fi}$  noch von der momentanen Mischungstiefe  $h_{mix}$  ab. Je größer  $h_{mix}$ , desto größer  $R_{fi}$  und desto stärker der Einfluss der schichtungserhaltenden Energieflüsse im Vergleich zur Turbulenz. Die *Monin-Obukhov Länge*  $L_M$  gibt jene Tiefe an, bis zu welcher der Wind eine Wasserschicht gegen die stabilisierende Wirkung eines negativen Auftriebsflusses ( $J_b^0 < 0$ ) mischen kann. Sie wird durch einen gewissen kritischen Wert von  $R_{fi}$  definiert, d.h. durch  $R_{fi} = R_{fi}^0$ . Auflösen von Gl. (5.45) nach  $h_{mix} \equiv L_M$  ergibt

$$(5.46) \quad L_M = -R_{fi}^0 \frac{2P_{kin}^W}{\rho J_b^0} \quad [m]$$

Für den Fall, dass  $J_b^0$  eine Folge eines Wärmeflusses an der Wasseroberfläche ist, gilt nach Gl. (5.31) und (5.33)

$$(5.47) \quad L_M = 2R_{fi}^0 \frac{c_p}{\alpha g} \frac{P_{kin}^W}{H_{tot}}$$

Die kritische Richardson-Zahl  $R_{fi}^0$  liegt bei ungefähr 0.1. Dies bedeutet in Kombination mit dem Faktor des relativen Energieeintrags durch den Wind,  $\chi = 0.01$  bis 0.02 (siehe Gl. 5.41), dass vom Energiefluss in 10 m Höhe über der Wasseroberfläche,  $P_{10}$ , der Anteil  $\chi R_{fi}^0 = (1 \text{ bis } 2) \cdot 10^{-3}$  in potentielle Energie umgewandelt wird. Ein Beispiel für die Größe von  $J_b^0$ ,  $P_{kin}^W$  und  $L_M$  findet sich in Tabelle 5.3.

In Abb. 5.8 ist die *Monin-Obukhov Länge* für den Vierwaldstättersee berechnet. Die Periode mit positivem  $L_M$  (März bis August) zeigt an, wann der See thermisch stabil ist. Zwar wird die oberste Wasserschicht durch den Wind beeinflusst, doch ist *im Durchschnitt* die Windwirkung sehr klein. Natürlich kann während einzelner meteorologischer Episoden (Sturm)  $L_M$  vorübergehend bedeutend größer werden! Auch Tag/Nacht-Unterschiede sind nicht berücksichtigt. Von September bis Februar ist  $L_M$  negativ, was thermische Instabilität und das Vorherrschen von konvektiver Turbulenz bedeutet. In dieser Zeit sinkt die Sprungschicht ab, bis im ganzen See homotherme Verhältnisse herrschen. Allerdings kann daraus noch nicht auf eine jährliche Vollzirkulation des Sees geschlossen werden; der positive Wert von  $\alpha$  zeigt nämlich an, dass die Oberflächentemperatur *im 10-jährigen Mittel* nie unter 4°C sinkt. In

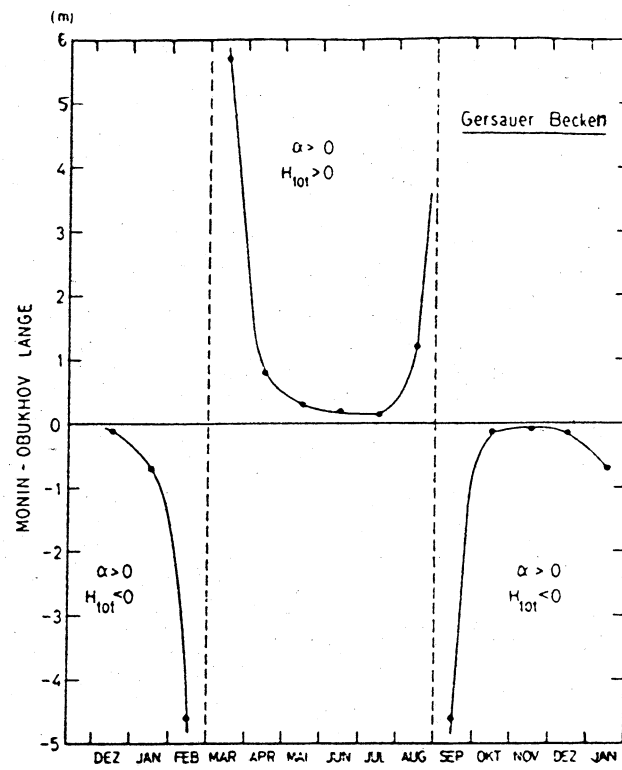
*einzelnen* Jahren ist aber das Auftreten einer *inversen* Schichtung im Gersauersee durchaus möglich ( $L_M > 0$  mit  $H_{\text{tot}} < 0$  und  $\alpha < 0$ ). Ein Beispiel für Tagesvariationen von  $L_M$  findet man in Abb. 5.9.

**Tab. 5.2: Zahlenbeispiel für Energieflüsse von Wind und Wärme**

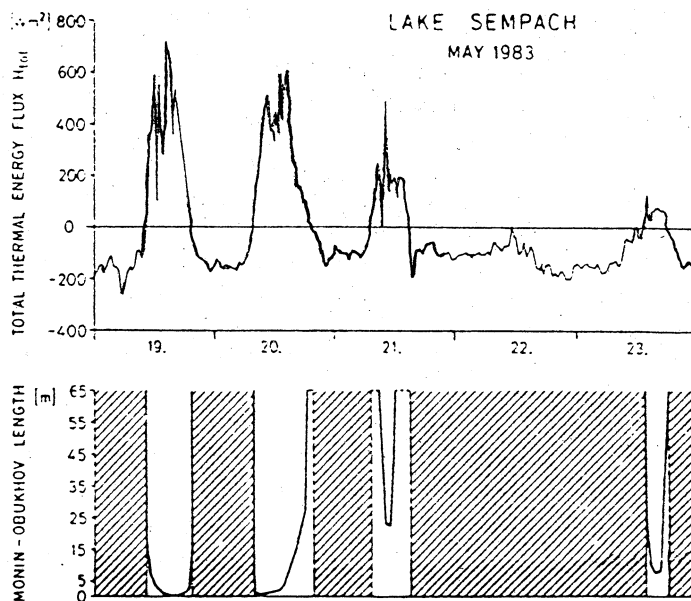
$\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ ,	$\rho_L = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$ ,	$C_{10} = 1 \cdot 10^{-3}$
$c_p = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,	$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$	$\chi = 10^{-2}$
$H_{\text{tot}} = 100 \text{ W m}^{-2}$ (Sommer)		
$\alpha = 2.07 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ (Wasser bei $T = 20^\circ\text{C}$ )		$R_{fi}^0 = 0.1$

Daraus folgt: ( $W_{10}$ : Windgeschwindigkeit 10 m oberhalb Wasseroberfläche)

Größe \ Wert bei	$W_{10} = 1 \text{ m s}^{-1}$	$W_{10} = 5 \text{ m s}^{-1}$
$J_b^0 = -\frac{\alpha g}{c_p \rho} H_{\text{tot}}$	$- 4.9 \cdot 10^{-8} \text{ W kg}^{-1}$	
$P_{\text{kin}}^W = \chi \rho_L c_{10} W_{10}^3$	$1.2 \cdot 10^{-5} \text{ W m}^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-2}$
$L_M = -2R_{fi}^0 \frac{P_{\text{kin}}^W}{\rho J_b^0}$	$0.03 \text{ m}$	$4.0 \text{ m}$



**Abb. 5.8** Jahreszeitlicher Verlauf der Monin-Obukhov Länge im Gersauersee, aus über 10 Jahren gemitteltem jährlichem Temperaturverlauf berechnet.



**Abb. 5.9:** Tagesvariation von Wärmefluss und Monin-Obukhov-Länge im Sempachersee (nach Marti und Imboden, 1986)