

4. Transport in Oberflächengewässern

In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem Transport von gelösten Stoffen und Wärme (bzw. Temperatur) in den turbulenten Strömungsfeldern in Oberflächengewässern. Wir benutzen wie schon bei der Analyse der Strömung eine Separation zwischen mittlerem Transport auf großen räumlichen oder zeitlichen Skalen und turbulentem Transport auf kleinen Skalen. Die daraus abgeleitete Größe "turbulente Diffusion" spielt in der physikalischen Limnologie eine zentrale Rolle. Im Weiteren betrachten wir die Energieflüsse in Seen und ihre Auswirkungen auf die Mischung.

4.1 Turbulente Diffusion

In Kapitel 3 hatten wir aus der Forderung der Massenerhaltung unter Vernachlässigung der molekularen Diffusion bereits die folgende Gleichung für die Änderung der Konzentration c eines im Wasser gelösten Stoffes in einem mitbewegten Wasserpaket (Lagrange'sche Darstellung) hergeleitet (Gl. 3.14):

$$(4.1) \quad \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{c} = J_c \quad [\text{kg m}^{-3} \text{ s}^{-1}]$$

mit J : *In situ* Produktion des Stoffes pro Volumen und Zeit.

Bemerkung: Ein im Wasser gelöster Stoff heißt *passiver Skalar* oder *passiver Tracer* falls er die Dichte und damit die Dynamik des Mediums nicht beeinflusst (also nur passiv mittransportiert wird). Gelöste Spurenstoffe (mit sehr geringen Konzentrationen) sind passive Tracer, da ihr Einfluss auf die Dichte vernachlässigbar ist. Hauptionen und Temperatur können im Allgemeinen nicht als passive Skalare behandelt werden. Partikel und Gasblasen, deren Dichte verschieden ist von derjenigen des Wassers, sind ebenfalls keine passiven oder - falls ihr Einfluss auf die Dichte des Wassers sehr klein ist - höchstens angenähert passive Skalare.

Außer durch in-situ Produktion (Gl. 4.1) verändert sich die Konzentration c auch noch durch molekulare Diffusion (vgl. Kapitel 1.4). Der Stofffluss bzw. die Konzentrationsänderung infolge molekularer Diffusion wird durch die *Fick'schen Gesetze* beschrieben (s. Gl. 1.4 und 1.5; mit D_c : molekularer Diffusionskoeffizient):

$$(4.2) \quad \text{Fick I: } \mathbf{F}_c = -D_c \nabla c \quad \text{Fick II: } \frac{dc}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{F}_c = D_c \nabla^2 c = D_c \Delta c$$

Gemäß dem 2. Fick'schen Gesetz muss Gl. (4.1) wie folgt ergänzt werden:

$$(4.3) \quad \frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{c} = D_c \Delta c + J_c$$

Da wegen der Inkompressibilität von Wasser $\text{div } \mathbf{v} = 0$ gilt (siehe Gl. 3.10), kann man die Konzentrationsänderung in der Euler'schen Darstellung schließlich auch in folgender Form schreiben (vgl. Symmetrisierungsschritt in Kap. 3, Gl. 3.35):

$$(4.4) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla(\mathbf{v}c) + D_c \Delta c + J_c$$

Die entsprechende Bilanzgleichung für die Wassertemperatur T lautet sinngemäß:

$$(4.5) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla(\mathbf{v}T) + D_T \Delta T + \frac{J_Q}{\rho c_p}$$

- mit
- D_T : molekulare Diffusionskoeffizient für Wärme [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
 - J_Q : *in situ* Produktion von Wärme [W m^{-3}]
 - ρc_p : = $4.18 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$: volumenspezifische Wärme von Wasser.

Nach den Gl. (4.4) und (4.5) setzt eine Berechnung der lokalen Konzentrations- bzw. Temperaturveränderungen voraus, dass das Strömungsfeld \mathbf{v} in der Nähe des betrachteten Punktes zu jeder Zeit bekannt ist. Wie wir im vorangehenden Kapitel gesehen haben, sind Strömungen in Oberflächengewässern aber kaum je laminar, sondern turbulent. Das bedeutet, dass das Strömungsfeld sowohl örtlich als auch zeitlich eine komplizierte Struktur aufweist und nicht allein mit Hilfe deterministischer Gleichungen beschrieben werden kann. Anders gesagt: Wir erwarten Strömungsmuster, welche einerseits in eine mittlere bzw. großräumige Strömung und andererseits in einen nur statistisch erfassbaren fluktuierenden Anteil zerlegt werden können.

Obschon man anhand von Experimenten zeigen kann, dass für das Wasser keine natürliche Aufteilung zwischen "großräumig" und "turbulent" besteht, gelingt es mit den im Folgenden beschriebenen Methoden, die Wirkung der Turbulenz von derjenigen der Strömungen abzutrennen, wenn auch diese Trennung nicht für alle Situationen eindeutig ist. Eine erste, plausible Herleitung der Gleichung für den turbulenten Transport liefert das so genannte Austausch-Modell (Abb. 4.1).

Betrachten wir den Transport eines Stoffes bzw. der Temperatur in einem Wasserkörper in vertikaler Richtung. Dabei wird angenommen, die mittlere vertikale Strömung sei Null. Dennoch sind als Folge des turbulenten Charakters der Strömung die vertikalen Geschwindigkeitskomponenten nicht jederzeit null. Wir können uns gedanklich vorstellen, dass die vertikalen Bewegungen durch so genannte Austausch-Ereignisse beschrieben werden können, bei denen je zwei Wasservolumina der Größe V_{ex} ihren Platz über eine vertikale Distanz L tauschen. Sind die Konzentrationen in den beiden Wasserpaketen nicht gleich (d.h. existiert in diesem Wasserkörper ein mittlerer vertikaler Konzentrationsgradient), so hat dieses Austausch-Ereignis einen Nettotransport (Stofffluss) F_z zur Folge, der proportional zum ausgetauschten Volumenfluss Q_{ex}/A (Q_{ex} : ausgetauschtes Volumen pro Zeit; A : Fläche), zur Austauschlänge L und zum mittleren vertikalen Konzentrationsgradienten $\partial c / \partial z$ ist (Abb. 4.1):

$$(4.6) \quad F_z = -\frac{Q_{\text{ex}}}{A} L \frac{\partial c}{\partial z}$$

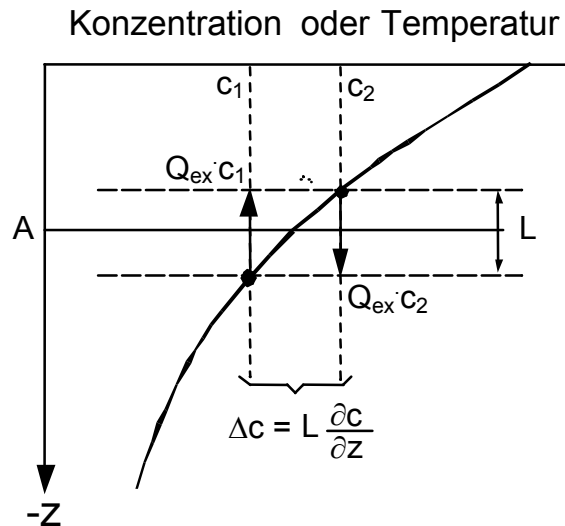


Abb. 4.1: Austauschmodell für turbulente Diffusion: Der vertikale Wasseraustausch Q_{ex} pro Zeit durch die horizontale Fläche A verursacht Stoffflüsse von $Q_{\text{ex}}/A \cdot c_1$ nach oben und $Q_{\text{ex}}/A \cdot c_2$ nach unten. Der Nettotransport von gelösten oder suspendierten Stoffen nach oben (in z -Richtung) ist somit $F_z = Q_{\text{ex}}/A \cdot (c_1 - c_2) = -Q_{\text{ex}}/A \cdot L \frac{\partial c}{\partial z}$, also proportional zum negativen Konzentrationsgradienten $-\partial c/\partial z$, der mittleren vertikalen Verschiebung L (Mischungslänge) sowie dem Wasseraustausch pro Zeit und Fläche Q_{ex}/A .

Wir fassen nun alle Ereignisse zusammen, welche pro Zeiteinheit eine bestimmte Fläche A durchqueren. Jedes einzelne Ereignis führt zu einem Transport, der proportional zum vertikalen Konzentrationsgradienten ist. Der Proportionalitätsfaktor setzt sich aus dem ausgetauschten Wasservolumen pro Zeit und Fläche (diese Größe hat die Einheit einer Geschwindigkeit!) und der mittleren Austauschdistanz L zusammen. Wir benützen für dieses Produkt die neue Variable K_z , den turbulenten Diffusionskoeffizienten (in der englischen Literatur oft auch *eddy diffusion coefficient* genannt). Die entstehende Gleichung besitzt dieselbe Form wie das erste Fick'sche Gesetz, und die Größe K_z hat tatsächlich die Dimension eines Diffusionskoeffizienten:

$$(4.7) \quad F_z = -K_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad \text{mit} \quad K_z = \frac{Q_{\text{ex}}}{A} L$$

Das Austauschmodell ist vom theoretischen Standpunkt aus nicht sehr befriedigend, hat aber den Vorteil, dass es ein anschauliches Bild für den turbulenten Diffusionskoeffizienten vermittelt: Der Koeffizient wird bestimmt durch die Intensität der Austauschströmung und durch die Distanz, über welche diese wirkt. Tatsächlich existiert ein analoges Bild für die molekulare Diffusion, wonach sich diese aus der mittleren

Geschwindigkeit der Moleküle und der mittleren freien Weglänge zusammensetzt. Im Gegensatz zum molekularen Diffusionskoeffizient ist der turbulente Koeffizient eine Eigenschaft des aquatischen Systems und hängt nicht von der Art des betrachteten Stoffes ab. Turbulente Diffusionskoeffizienten sind also für alle gelösten Stoffe gleich, können aber nicht – wie die molekularen Diffusionskoeffizienten – in einem Handbuch tabelliert werden, da sie von Gewässer zu Gewässer und von einem Zeitpunkt zum andern stark variieren.

Die zweite und mathematisch exaktere Methode zur Herleitung der turbulenten Diffusion ist die Reynolds-Aufspaltung, welche wir schon in Kapitel 3 für das Strömungsfeld kennen gelernt haben. Sie geht davon aus, dass jedes Variablenfeld f in einen zeitlichen Mittelwert \bar{f} und eine Restfluktuation f' aufgeteilt werden kann, wie in Gl. (3.33) und (3.34) für das Beispiel der Geschwindigkeitskomponenten definiert.

Diese Aufspaltung wollen wir nun auf die Gleichung für advektiven und molekular-diffusiven Transport (Gl. 4.4) anwenden, wobei wir der Einfachheit halber nur den Transport in z -Richtung betrachten und den Quellterm J_c weglassen:

$$(4.9) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(cv_z) + D_c \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

Spaltet man v_z und c gemäß Gl. (3.33) auf, so ergibt sich:

$$(4.10) \quad \frac{\partial (C + c')}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(CV_z + Cv_z' + c'V_z + c'v_z') + D_c \frac{\partial^2 (C + c')}{\partial z^2}$$

Nun führen wir eine erneute Mittelung durch, wobei wiederum zu beachten ist, dass gemäß Gl. (3.34) $\bar{f}' = 0$ und $\bar{\bar{f}} = \bar{f}$ gilt, und dass die Ableitungen mit den Mittelwertbildungen vertauscht werden können. Somit folgt:

$$(4.11) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(CV_z) - \frac{\partial}{\partial z} \overline{c'v_z'} + D_c \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Der advektive Transport (cv_z) zerfällt also in den mittleren Fluss CV_z und den turbulenten Fluss $\overline{c'v_z'}$. Letzterer gleicht dem molekularen Transport, weswegen er in Analogie zum Fick'schen Gesetz durch den Gradienten des mittleren Feldes approximiert wird:

$$(4.12) \quad \overline{c'v_z'} = -K_z \frac{\partial C}{\partial z} \quad \text{lokale Gradienten-Approximation}$$

K_z ist – wie schon in Gl. (4.7) – der turbulente Diffusionskoeffizient. Da er viel größer ist als der molekulare Diffusionskoeffizient D_c , kann letzterer meistens gegenüber K_z vernachlässigt werden. Gl. (4.11) wird damit zu:

$$(4.13) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(CV_z) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

Diese Gleichung beschreibt die Änderung der mittleren Konzentration an einem Ort (Euler'sche Darstellung) infolge der mittleren vertikalen Strömung (Advektion) und der vertikalen turbulenten Diffusion. Analoge Beziehungen lassen sich für die andern Koordinaten schreiben. In drei Dimensionen erhalten wir also:

$$(4.14) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(CV_x) - \frac{\partial}{\partial y}(CV_y) - \frac{\partial}{\partial z}(CV_z) + \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial C}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

Durch Einführung eines Tensors \mathbf{K} der turbulenten Diffusionskoeffizienten lässt sich Gl. (4.14) kompakter schreiben als:

$$(4.15) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla(\mathbf{C}\mathbf{V}) + \nabla(\mathbf{K}\nabla C)$$

Meist wird angenommen, dass \mathbf{K} nur die diagonalen Elemente $K_x (= K_{xx})$, K_y , und K_z enthalte, wobei die drei Komponenten K_i keineswegs gleich sein müssen. Speziell für den Fall eines geschichteten Wasserkörpers ist K_z normalerweise sehr viel kleiner als K_x und K_y (vgl. Kap. 3.4). Falls tatsächlich $K_x = K_y = K_z$ gilt, heißt das turbulente Geschwindigkeitsfeld *isotrop*. Dies ist selten der Fall, jedoch kann oft angenommen werden, die Turbulenz sei *horizontal isotrop*, d.h. es gilt: $K_x = K_y = K_h \neq K_z$.

Der advective Term $\nabla(\mathbf{C}\mathbf{V})$ kann in die Terme $\mathbf{C}\nabla\mathbf{V}$ und $\mathbf{V}\nabla C$ aufgespaltet werden. Man kann zeigen, dass die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Fluide, $\nabla\mathbf{v} = 0$, auch für die Anteile \mathbf{V} bzw. \mathbf{v}' allein gilt. Damit kann die im Übergang von Gl. (4.3) zu (4.4) vorgenommene "Symmetrisierung" wieder rückgängig gemacht werden. Unter Hinzunahme des Quellterms J_c erhalten wir schließlich folgende vollständige Gleichung für die Konzentrationsänderung an einem Ort im fluiden Medium:

$$(4.16) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -\mathbf{V}\nabla C + \nabla(\mathbf{K}\nabla C) + J_c$$

Der erste Term beschreibt den advektiven Transport durch das mittlere Strömungsfeld \mathbf{V} , der zweite Term die turbulente Diffusion und der letzte Term die *in situ* Produktion bzw. Zehrung.

4.2 Die Messung von Diffusion im See

Oberflächengewässer besitzen meist eine Dichteschichtung, welche dazu führt, dass die Turbulenz *nicht isotrop* ist. Die Linien gleicher Dichte, die *Isopyknen*, liegen meist in etwa horizontal, d. h. die Schichtung ist vorwiegend entlang der Vertikalen. Die turbulenten Strömungen verlaufen präferenziell entlang der Isopyknen, man spricht von *isopyknischer* Mischung. Entsprechend heißt die turbulente Diffusion quer zu den Isopyknen *diapyknische* Mischung. Isopyknische Diffusionskoeffizienten sind meist um einige Zehnerpotenzen größer als diapyknische.

Eine qualitative, anschauliche Begründung für diese Anisotropie liefert eine Energiebetrachtung im Austauschmodell der turbulenten Diffusion (vgl. Fig. 4.1). Um in einer stabilen vertikalen Schichtung zwei Wasserpakete unterschiedlicher Dichte in vertikaler Richtung auszutauschen, muss Arbeit gegen die Schwerkraft (Heben des dichteren Paketes) bzw. gegen den Auftrieb (Absenken des leichteren Paketes) verrichtet werden. Die potentielle Energie der Anordnung wird um den Betrag $\Delta\rho g\Delta h$ (Δh = Höhenunterschied) erhöht. Im Gegensatz dazu verändert sich beim Austausch von Wasserpaketen gleicher Dichte die potentielle Energie nicht. Die diapyknische Mischung benötigt also im Gegensatz zur isopyknischen selbst im reibungsfreien Fall Energie. Den Zusammenhang zwischen verfügbarer mechanischer Energie und turbulenter diapyknischer Mischung werden wir weiter unten (Abschnitt 4.4) quantitativ erörtern.

In Seen liegen die Isopyknen meist nahezu in der Horizontalen. Man spricht daher gewöhnlich vereinfachend nur von horizontaler bzw. vertikaler Mischung. Da wiederum die horizontalen Diffusionskoeffizienten (K_x und K_y) viel größer sind als der vertikale (K_z), sind Seen oft vollständig (oder nahezu vollständig) horizontal durchmischt. Die Annahme horizontaler Homogenität vereinfacht die Untersuchung des Stoff- oder Wärmetransportes ganz erheblich, da sie das Problem auf eine Dimension, die z-Richtung, reduziert. Auch bei der Messung von Tracerverteilungen in Seen macht man sich diese Annahme zu Nutzen: Die Messung eines einzigen vertikalen Profils $C(z)$ an der tiefsten Stelle des Sees ergibt bereits die vollständige Verteilung.

Die Annahme horizontaler Homogenität gilt insbesondere auch für die Wassertemperatur T : In einer bestimmten Tiefe herrscht überall die gleiche Temperatur. Wäre dies nicht der Fall, so würde in gleicher Tiefe Wasser unterschiedlicher Dichte existieren, was zu einem baroklinen Druckgradienten und letztlich (wie im Ozean) zu sogenannten *Dichteströmungen* führen würde. Solche Strömungen entlang der dann nicht mehr horizontalen Isopyknen würden auch vertikale Advektion bewirken. Im Falle der horizontalen Homogenität hingegen besteht kein Anlass für vertikale Strömungen in Seen. Sofern keine unterseeischen Quellen oder Abflüsse vorhanden sind, müssen vertikale Strömungen überdies im Mittel über jede horizontale Querschnittsfläche $A(z)$ verschwinden. Mit Ausnahme spezieller Situationen wie durch Zuflüsse induzierte Dichteströmungen (z. B. *turbidity currents* von absinkendem, partikelbeladenem Flusswasser bei Hochwasser) spielt die vertikale Advektion daher in Seen eine untergeordnete Rolle. Hingegen ist die vertikale turbulente Diffusion K_z von zentraler Bedeutung.

Zur experimentellen Messung von K_z eignen sich nun speziell *konservative Tracer* (*konservativ* = keine *in situ* Quellen oder Senken). Die Transportgleichung für konservative Tracer in Seen reduziert sich nach obigen Ausführungen auf:

$$(4.17) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

Diese reine Diffusionsgleichung lässt sich weiter vereinfachen, wenn K_z als räumlich und zeitlich konstant angenommen wird (diese Annahme ist allerdings für die molekulare Diffusion eher zulässig als für turbulente Diffusion). Dann wird Gl. (4.17) zu:

$$(4.18) \quad \frac{\partial C}{\partial t} = K_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Für diese Gleichung gibt es einfache analytische Lösungen für bestimmte Anfangs- und Randbedingungen, die zur experimentellen Bestimmung von K_z verwendet werden können. Insbesondere lautet für den Fall einer anfangs auf eine Tiefe z_0 konzentrierten Tracermenge m (d. h. $C(z, t = 0) = m \delta(z - z_0)$ mit der Deltafunktion δ) die Lösung für Gl. (4.18) wie folgt:

$$(4.19) \quad C(z, t) = \frac{m}{2\sqrt{\pi K_z t}} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{4K_z t}}$$

Gl. (4.19) beschreibt eine Normalverteilung (Gauß'sche Glockenkurve) um den Mittelwert z_0 mit der Standardabweichung σ bzw. Varianz σ^2 :

$$(4.20) \quad \sigma = \sqrt{2K_z t} \quad \text{bzw.} \quad \sigma^2 = 2K_z t$$

Bringt man also zu einer Zeit $t = 0$ einen konservativen Tracer gleichmäßig in eine unendlich dünne Schicht in der Tiefe z_0 ein, so erwartet man eine Gauß'sche Konzentrationsverteilung, deren Breite gemäß Gl. (4.20) mit der Wurzel der Zeit zunimmt. Obwohl es natürlich nicht möglich ist, die Anfangsbedingung exakt herzustellen, können die Beziehungen (4.19) und (4.20) zur Bestimmung von K_z verwendet werden. Ein Beispiel mit dem konservativen Gastracer Schwefelhexafluorid (SF_6) im Monimolimnion eines stark geschichteten Tageausees ist in Abb. 4.3 gezeigt.

Gl. (4.20) stellt für diffusive Prozesse einen wichtigen Zusammenhang zwischen der räumlichen und zeitlichen Skala her. Damit lässt sich z. B. abschätzen, wie weit der (mittlere) diffusive Transport in einer gegebenen Zeit reicht, oder wie lange die diffusive Mischung über eine gegebene Distanz dauert. Die typische Mischungslänge L_{mix} und die typische Mischungszeit τ_{mix} sind nach (4.20) wie folgt verknüpft:

$$(4.21) \quad L_{\text{mix}}^2 = 2K_z \tau_{\text{mix}}$$

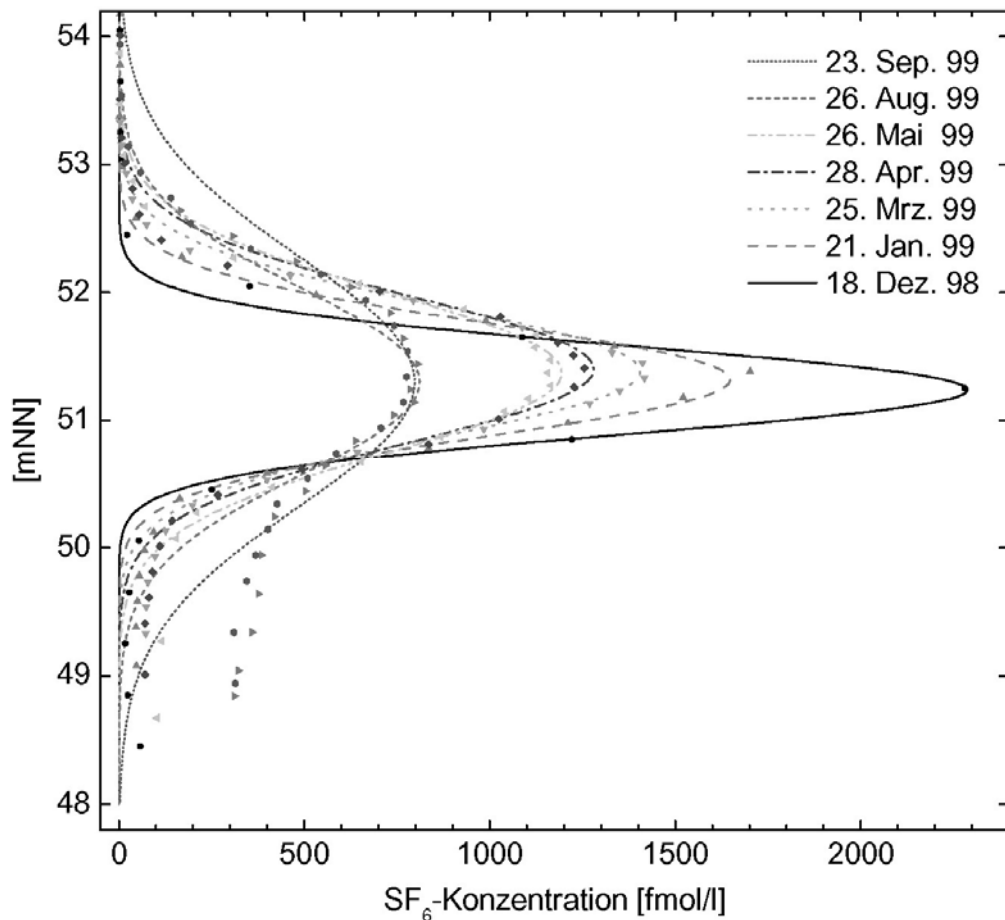


Abb. 4.3: Bestimmung der vertikalen Wirbeldiffusion aus der Anpassung von Gaußkurven an die Verteilungen von künstlich eingebrachtem SF₆ im Tagebausee Merseburg-Ost 1b. Im sehr stark geschichteten Monimolimnion dieses Sees ergab sich ein sehr niedriger Wert von ca. $1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ für K_z , der eine Größenordnung kleiner als die molekulare Diffusion von Wärme ist. Aus von Rohden, 2002, Diss. Universität Heidelberg. Siehe auch von Rohden und Ilmberger, 2001, Aquat. Sci. 63:417-431.

Die Methode der Messung des Diffusionskoeffizienten durch Beobachtung der Aufweitung einer Tracerverteilung lässt sich auch auf horizontale turbulente Mischung anwenden. Allerdings ist die Situation komplizierter, da die 2-dimensionalen Tracerverteilungen nicht symmetrisch sind und die gesamte Tracerwolke durch Advektion bewegt wird. Abb. 4.4. zeigt Beispiele für die Form horizontaler Verteilungen und für die zeitliche Entwicklung einer Tracerwolke. Eine Möglichkeit der Beschreibung der Entwicklung besteht in der Annäherung der Tracerverteilungen durch Gaußkurven entlang der beiden Hauptachsen einer Ellipse, mit den zugehörigen Varianzen σ_i^2 . Die Wirkung der Advektion wird durch die Bewegung des Massenschwerpunktes der Verteilung und deren Rotation beschrieben.

Weil die turbulente Diffusion skalenabhängig ist (s. unten), ändern sich die Diffusionskoeffizienten K_i im Laufe des Experimentes. Anstelle von Gl. (4.20) gilt für die momentanen Diffusionskoeffizienten und Varianzen der Zusammenhang $d\sigma_i^2/dt = 2K_i$.

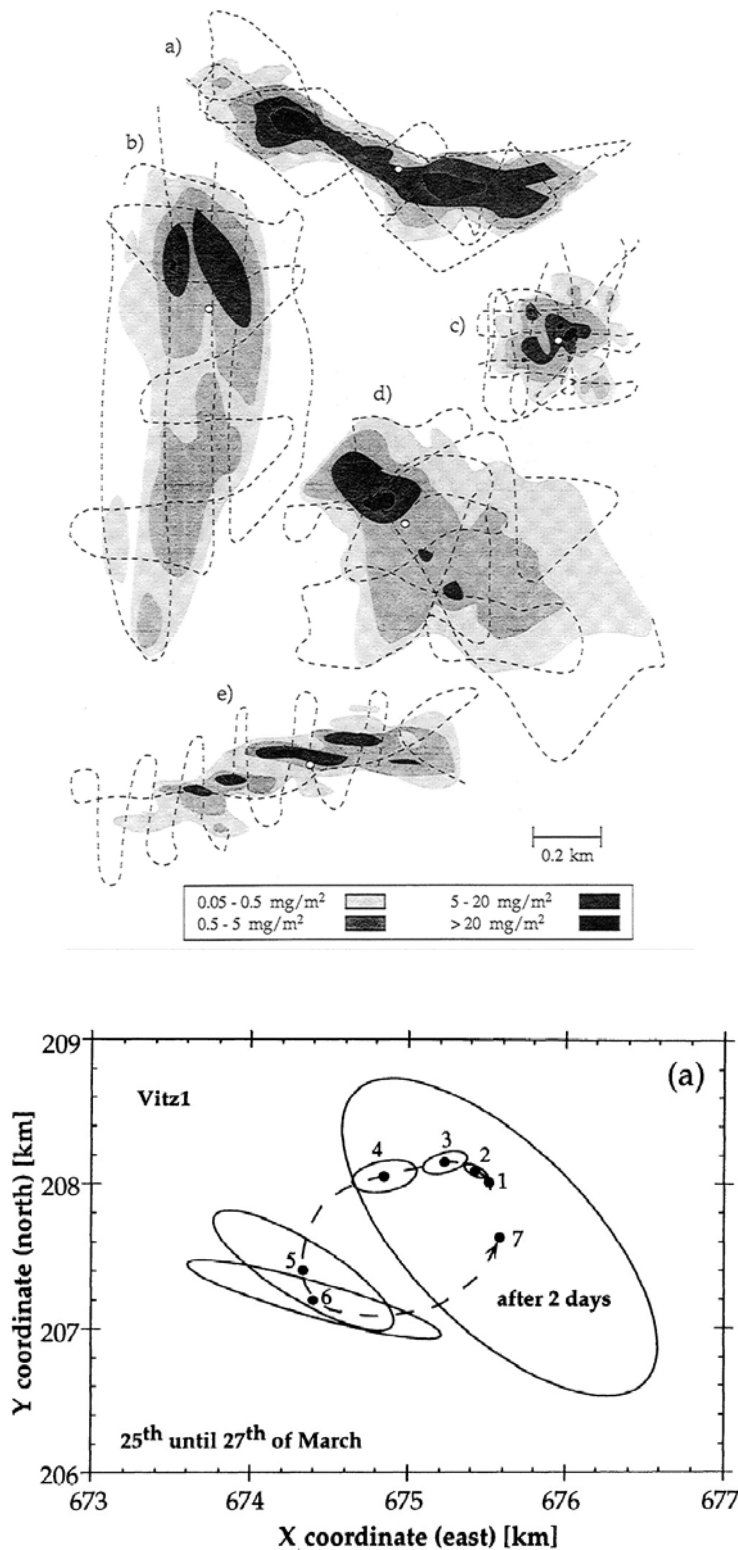


Abb. 4.4: Bestimmung der horizontalen Wirbeldiffusion mittels künstlich eingebrachtem Farbstoff (Uranin) in Seen. Oben: Effektiv gemessene Tracerwolken in verschiedenen Seen. Unten: Idealisierter zeitlicher Verlauf eines Experiments. Für die horizontale turbulente Diffusivität K_h ergaben sich Werte zwischen 0.02 und $0.3 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Aus Peeters et al., 1996, J. Geophys. Res., C101, 18361-18375.

Die erwähnte Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von der Distanz, über welche die Wirkung der Diffusion betrachtet wird, stellt eine fundamentale Schwierigkeit dar. Diese Skalenabhängigkeit der turbulenten Diffusion resultiert aus der Aufteilung in mittlere Strömung (Advektion) und Fluktuationsströmung (turbulente Diffusion). Je größer eine Tracerwolke, desto größer die obere Grenze jener Wirbel, welche auf den Tracer diffusiv (formverändernd), nicht advektiv (Verschiebung der Wolke als Ganzes) wirken. Messungen von horizontaler Diffusion im Meer bestätigen diesen Sachverhalt (Abb. 4.5). Dies führt zur paradoxen Situation, dass zwei Tracerwolken unterschiedlicher räumlicher Ausdehnung gleichzeitig (d.h. unter dem Einfluss des selben turbulenten Strömungsfeldes) durch scheinbar verschieden große Diffusionskoeffizienten beeinflusst werden.

Für die Abhängigkeit des turbulenten Diffusionskoeffizienten K von der betrachteten Längenskala L existieren verschiedene Modelle. Aus dem Vergleich verschiedener Experimente sowie theoretischen Überlegungen postulierte Okubo einen Zusammenhang der Form $K \sim L^{4/3}$ (s. Abb. 4.5). Peeters et al. konnten dies jedoch für Einzelexperimente in Seen (vgl. Abb. 4.4.) nicht bestätigen.

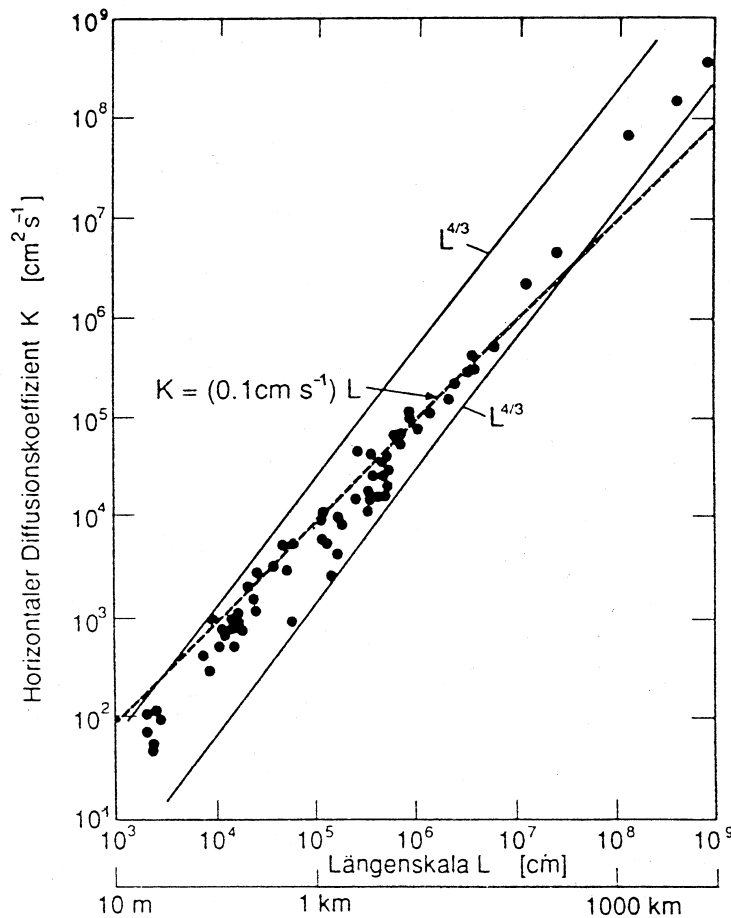


Abb. 4.5: Horizontale Diffusion im Meer als Funktion der horizontalen Ausdehnung L , berechnet aus verschiedenen Experimenten mit künstlichen Tracern (nach Okubo, 1971, Deep-Sea Res. **18**, 789-802). Eine kritische Diskussion des Okubo-Diagramms geben Peeters et al., 1996, J. Geophys. Res., C101, 18361-18375.

Eine weitere wichtige Methode zur Bestimmung des vertikalen turbulenten Diffusionskoeffizienten K_z in Seen beruht ebenfalls auf der Annahme der horizontalen Homogenität sowie der Abwesenheit vertikaler Advektion.

Dank der Annahme horizontaler Homogenität kann in einem See jederzeit aus einem einzigen vertikalen Temperaturprofil $T(z)$ (gemessen an der tiefsten Stelle des Sees) und aus der Seeform (ausgedrückt durch die Querschnittsfläche $A(z)$ als Funktion der Tiefe) der Wärmeinhalt $W(z_0)$ unterhalb der Tiefe z_0 berechnet werden:

$$(4.22) \quad W(z_0) = c_p \rho \int_{z_m}^{z_0} A(z) T(z) dz$$

Mit: z_m = z-Koordinate der tiefsten Stelle (maximale Tiefe des Seebodens).

Die zeitliche Änderung des Wärmeinhaltes ist somit (vgl. Abb. 4.6):

$$(4.23) \quad \frac{\partial W(z_0, t)}{\partial t} = c_p \rho \int_{z_m}^{z_0} A(z) \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} dz$$

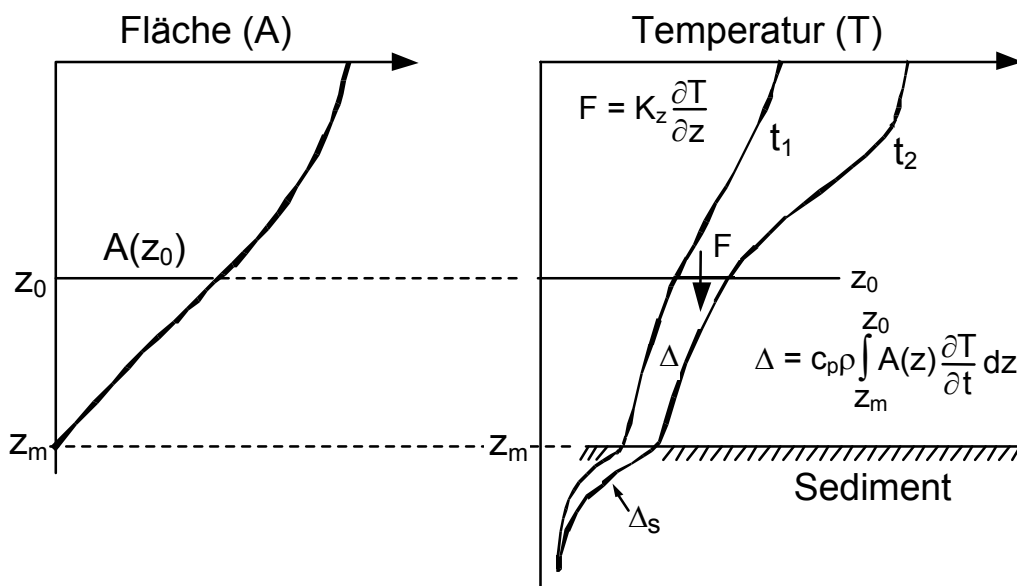


Abb. 4.6: Berechnung der vertikalen Wirbeldiffusion aus Temperaturprofilen für tiefenabhängigen Seequerschnitt $A(z)$. Der turbulente Wärmetransport durch die Fläche $A(z_0)$ erhöht den Wärmeinhalt des darunter liegenden Wassers um den Wert Δ . Unter Umständen muss zusätzlich die Veränderung des Wärmeinhaltes des Sedimentes Δ_s berücksichtigt werden.

Im Hypolimnion, außerhalb des direkten Einflusses der solaren Einstrahlung, kann die Temperatur in guter Näherung als *konservativer Tracer* (keine Quellen oder Senken) betrachtet werden. Da außerdem kein advektiver Transport vorkommen soll, kann

angenommen werden, die Änderung der Temperatur bzw. des Wärmeinhaltes $W(z_0)$ unterhalb der Tiefe z_0 sei nur die Folge des turbulent-diffusiven Wärmeflusses F_{th} durch die Fläche $A(z_0)$. Dann folgt nach dem 1. Fick'schen Gesetz (Gl. 1.1, Tab. 4.1):

$$(4.24) \quad \frac{\partial W(z_0, t)}{\partial t} = -A(z_0) \cdot F_{th}(z_0) = A(z_0) c_p \rho K_z(z_0) \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z_0}$$

Durch Auflösen von Gl. (4.24) nach dem turbulenten vertikalen Diffusionskoeffizienten K_z und Einsetzen der Gl. (4.23) kann folgender Ausdruck für K_z abgeleitet werden:

$$(4.25) \quad K_z(z_0) = \frac{\frac{\partial W(z_0, t)}{\partial t}}{A(z_0) c_p \rho \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z_0}} = \frac{\int_{z_m}^{z_0} A(z) \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} dz}{A(z_0) \left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z_0}}$$

Gl. (4.25) liefert also ein Rezept zur Bestimmung der vertikalen turbulenten Diffusion in Seen. Die Methode wird als Fluss-Gradienten oder *Bilanz-Gradienten Methode* bezeichnet, da sie auf der Beziehung zwischen der Wärmebilanz des Volumens unterhalb der Tiefe z und dem Temperaturgradienten in dieser Tiefe beruht.

In der Praxis wird nicht die momentane Änderung der Temperatur bzw. des Wärmeinhaltes gemessen, sondern die Änderungen werden aus Temperaturprofilen zu zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 berechnet. Gl. (4.25) wird dann zu:

$$(4.26) \quad K_z(z_0) = \frac{\frac{\Delta W(z_0)}{\Delta t}}{A(z_0) c_p \rho \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z_0}} = \frac{\int_{z_m}^{z_0} A(z) \frac{\Delta T(z)}{\Delta t} dz}{A(z_0) \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z_0}}$$

mit $\Delta t = (t_2 - t_1)$; $\Delta W(z_0) = W(z_0, t_2) - W(z_0, t_1)$; $\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z_0} = \frac{1}{2} \left(\left. \frac{\partial T(z, t_1)}{\partial z} \right|_{z_0} + \left. \frac{\partial T(z, t_1)}{\partial z} \right|_{z_0} \right)$

Weil die Temperatur näherungsweise ein konservativer Tracer ist und relativ leicht mit Sonden gemessen werden kann, ist diese Methode zur Berechnung des vertikalen Diffusionskoeffizienten verhältnismäßig einfach. Allerdings benötigt man Temperaturmessgeräte, welche über Wochen und Monate hinaus auch *absolut* genaue T-Werte liefern, da die zeitlichen Temperaturveränderungen im Hypolimnion sehr klein sind. Die klassischen limnologischen Standard-Messungen erfüllen diese Anforderungen oft nicht. Sind Messreihen über mehrere Jahre vorhanden, so kann dennoch aus der *mittleren* jahreszeitlichen Entwicklung der Wassertemperatur mit Gl. (4.26) ein mittlerer Jahresgang für K_z berechnet werden. Ein klassisches Beispiel für den Zürichsee zeigt Abb. 4.7.

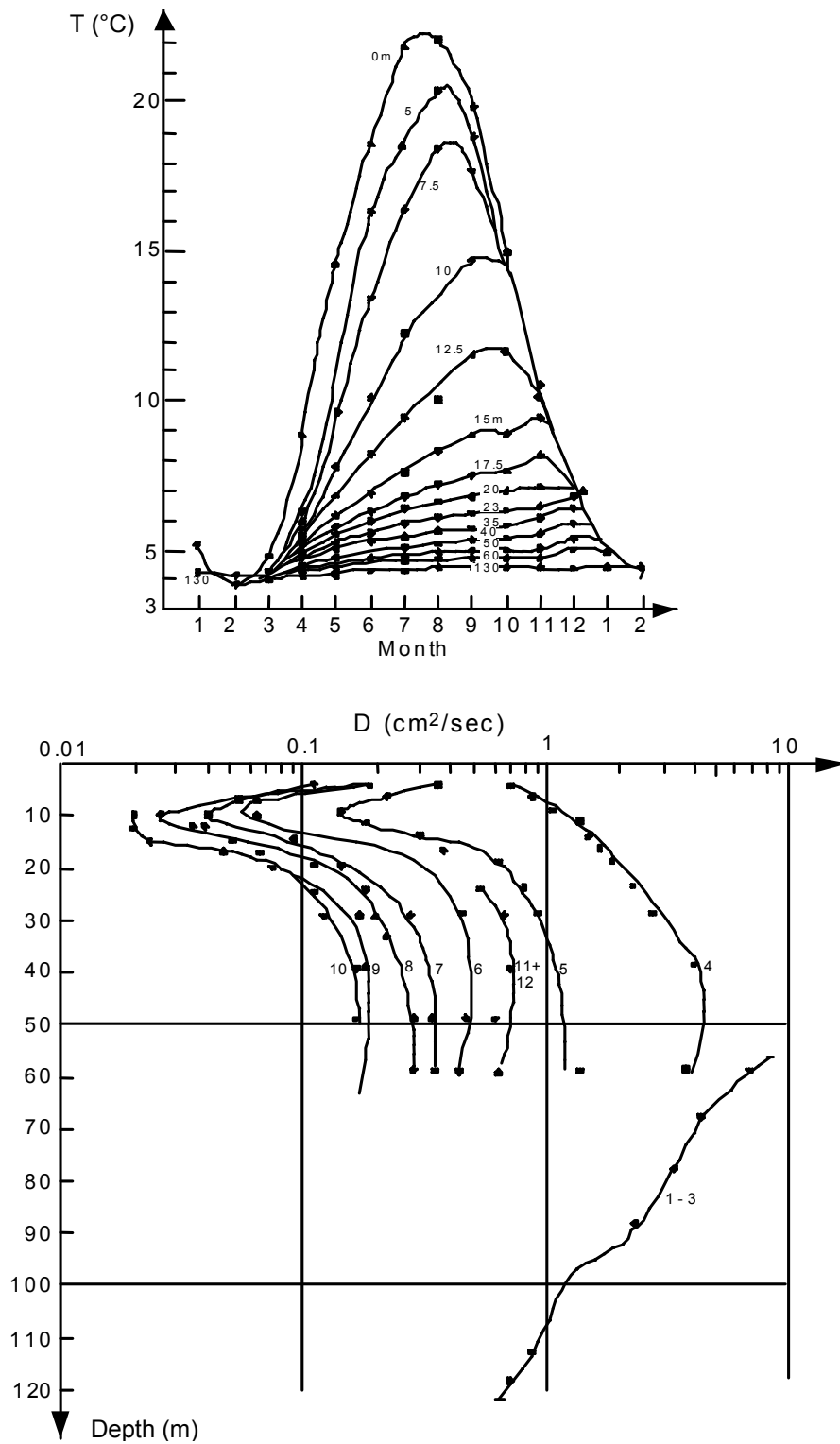


Abb. 4.7: Mittlerer Jahrgang der Wassertemperatur in verschiedener Tiefe im Zürichsee (oben) und Berechnung des vertikalen turbulenten Diffusionskoeffizienten (hier D genannt) aus diesen Daten (unten). Nach Li, 1973, Schweiz. Z. Hydrol. 35, 1. Zum Vergleich: Der *molekulare* Diffusionskoeffizient für Wärme bei 4°C ist $1.36 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

Neben der Temperatur werden auch andere Tracer zur Bestimmung der Diffusion nach der Bilanz-Gradienten Methode verwendet, welche entweder konservativ sind (z.B. Chlorid) oder nach einem genau bekannten Gesetz entstehen bzw. verschwinden. Zur zweiten Kategorie gehören namentlich die radioaktiven Substanzen. Die Bilanz-Gradienten Methode benötigt keine Einspeisung eines *künstlichen Tracers* (wie z. B. SF₆ oder Farbstoffe in den obigen Beispielen), sondern verwendet meist so genannte *natürliche Tracer*, d. h. Spurenstoffe, die bereits im zu untersuchenden System (hier: See) vorhanden sind. Man spricht in diesem Fall auch von *Umwelttracern*.

Tracer- und Isotopenmethoden und ihre Anwendungen zur Untersuchung aquatischer Systeme werden in der Vorlesung Aquatische Physik II detailliert behandelt. Wir beschränken uns daher hier auf die kurze Diskussion zweier Beispiele.

Beispiel Radon:

Radon-222 (²²²Rn) ist ein natürliches, radioaktives Edelgas (Halbwertszeit 3.83 Tage), welches vor allem im Sediment eines Sees aus dem Zerfall von Radium-226 (²²⁶Ra, Halbwertszeit 1620 Jahre) entsteht. Radon diffundiert vom Sediment ins freie Seewasser und wird dort je nach Mischungsintensität mehr oder weniger rasch in höhere Wasserschichten transportiert, bevor es zerfällt. Seine kurze Halbwertszeit führt innerhalb von 7 bis 10 Tagen zu stationären Radon-Verteilungen. Diese werden meist im Rahmen eines 1-dimensionalen Diffusionsmodells interpretiert. Wir betrachten im Folgenden nur das so genannte Überschuss-Radon C_{ex} (englisch: "excess radon"), d.h. jenes ²²²Rn, das *nicht* mit im Wasser gelöstem ²²⁶Ra im Zerfallsgleichgewicht steht (und somit ständig nachgeliefert wird). Für den advektionslosen, stationären Fall in einer Dimension reduziert sich Gl. (4.16) auf die Form:

$$(4.27) \quad K_z \frac{\partial^2 C_{ex}}{\partial z^2} - \lambda C_{ex} = 0$$

mit der Zerfallskonstante $\lambda = \frac{\ln 2}{3.83d} = 0.181 \text{ d}^{-1} = 2.10 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$

Gl. (4.27) hat folgende Lösung:

$$(4.28) \quad C_{ex}(h) = C_{ex}(0) e^{-h(\lambda/K_z)^{1/2}}$$

mit h: Distanz vom Seegrund
 C_{ex}(0): Überschuss-Radon am Sediment (Seegrund)

Logarithmisieren von Gl. (4.28) liefert: $\ln C_{ex}(h) = \ln C_{ex}(0) - (\lambda/K_z)^{1/2} h$.

Trägt man also $\ln C_{ex}(h)$ gegen h auf, so sollte sich eine Gerade ergeben mit dem Achsenabschnitt $\ln C_{ex}(0)$ und der Steigung $-(\lambda/K_z)^{1/2}$. Da λ bekannt ist, lässt sich aus der Steigung der Diffusionskoeffizient K_z berechnen. In Abb. 4.8 sind Radon-Profile aus dem Greifensee (Kanton Zürich, Schweiz) dargestellt.

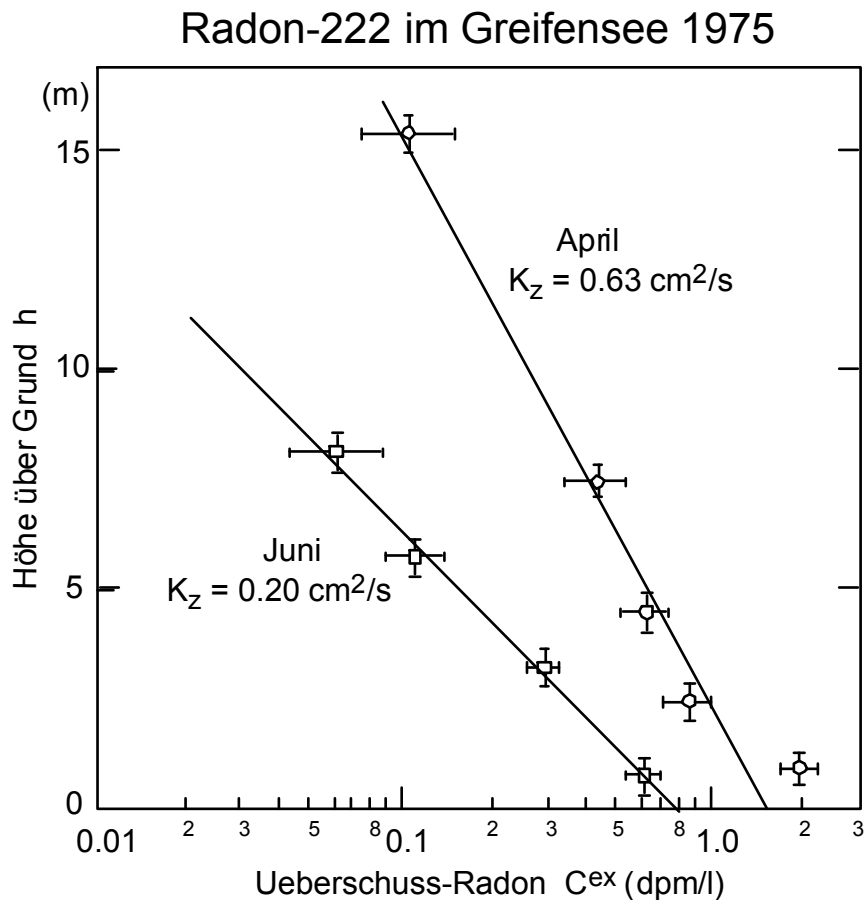


Abb. 4.8: Überschuss-Radon im Hypolimnion des Greifensees. Die vertikale Diffusion sinkt von April bis Juni um den Faktor 3. Nach Imboden und Emerson, 1978.

Beispiel Tritium-Helium:

Helium-3 (^3He), ein stabiles He-Isotop, entsteht aus dem Zerfall des superschweren Wasserstoffkerns Tritium (^3H , Halbwertszeit 12.32 a). Tritium ist seit den Kernwaffenversuchen in der Atmosphäre im Wasser weit verbreitet. Solange Wasser in direktem Gasaustausch mit der Atmosphäre steht, bleibt seine ^3He -Konzentration im Gleichgewicht mit der Luft (der fortlaufend gebildete Überschuss an ^3He entweicht). Wasser im Hypolimnion eines Sees akkumuliert jedoch das tritiogene (vom Tritiumzerfall stammende) $^3\text{He}_{\text{tri}}$. Aus gleichzeitiger Messung von ^3He und Tritium kann das so genannte Tritium-Helium-"Wasseralter" bestimmt werden, d.h. jene Zeit, die seit dem letzten Kontakt des Wassers mit der Atmosphäre verstrichen ist.

Naiv würde man erwarten, dass in Seen das Wasseralter bei jeder winterlichen Zirkulation auf Null gesetzt wird, und während des Sommers im Hypolimnion ansteigt. In Abb. 4.9 ist die zeitliche Entwicklung des Wasseralters im Baldeggersee (Schweiz, Kanton Aargau) dargestellt. Offenbar zirkuliert der See im Winter nicht vollständig, aber das ^3H - ^3He -Alter zeigt immerhin einen gewissen Wasseraustausch am Seegrund während des Winters. Die Bilanz-Gradienten Methode kann auf das Isotopenpaar ^3H - ^3He bzw. auf das daraus abgeleitete Alter angewandt werden.

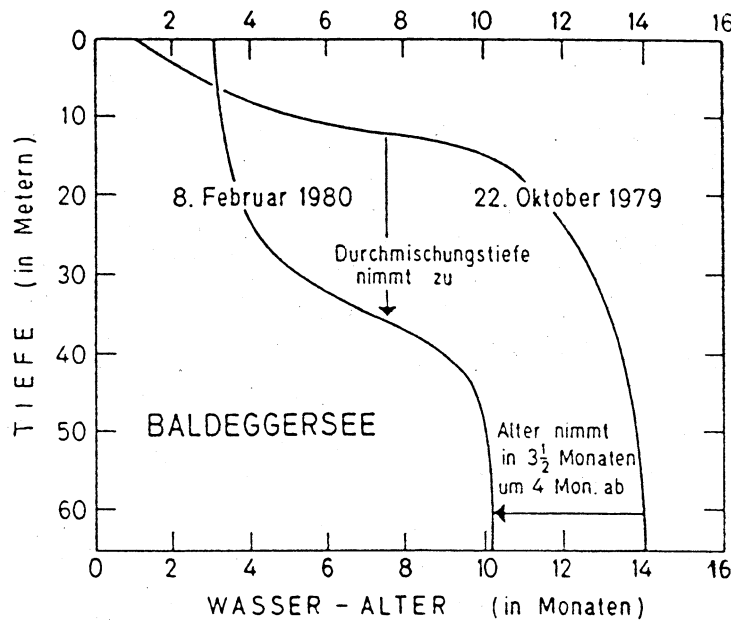


Abb. 4.9: Das Isotop Helium-3 entsteht durch den radioaktiven Zerfall von Tritium im Wasser. Aus deren Verhältnis lässt sich das Wasseralter bestimmen. In den tiefen Schichten des Baldeggersees hat das Alter zwischen Oktober 1979 und Februar 1980 von 14 auf 10 Monate abgenommen; ein Teil des Wassers ist in dieser Zeit offenbar durch "junges" Wasser von der Oberfläche ersetzt worden.

Die Übertragung der Bilanz-Gradienten Methode auf das ^3H - ^3He -System ist am einfachsten für die Summe $^3\text{H}^* = ^3\text{H} + ^3\text{He}_{\text{tri}}$, dem so genannten "stabilen Tritium", da dieses ein konservativer Tracer ist. Man kann daher in Gl. (4.25) einfach die Temperatur T durch das stabile Tritium $^3\text{H}^*$ ersetzen und K_z berechnen. Allerdings ist es meistens günstiger, die Methode auf ^3He (sowohl das Gesamt- ^3He als auch $^3\text{He}_{\text{tri}}$ kann verwendet werden) anzuwenden, da dieser Tracer größere Gradienten aufweist und genauer gemessen werden kann. Im Bilanzterm im Zähler von Gl. (4.25) muss dann der ^3He -Quellterm $+\lambda^3\text{H}$ *abgezogen* werden, um die nur durch Diffusion verursachte Änderung von ^3He zu erhalten. Es ergibt sich folgender Ausdruck für K_z :

$$(4.29) \quad K_z(z_0) = \frac{\int_{z_m}^{z_0} A(z) \left(\frac{\partial ^3\text{He}(z,t)}{\partial t} - \lambda^3\text{H}(z,t) \right) dz}{A(z_0) \frac{\partial ^3\text{He}(z,t)}{\partial z} \Big|_{z_0}}$$

mit der Zerfallskonstante $\lambda = \frac{\ln 2}{12.32 \text{ a}} = 0.0563 \text{ a}^{-1} = 1.78 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$

Eine analoge Gleichung gilt näherungsweise auch für das ^3H - ^3He -Wasseralter τ mit dem Quellterm $+1$ (ohne Mischung gilt $\partial\tau/\partial t = 1$).