

# 3 Turbulente Strömung in Oberflächengewässern

In diesem Kapitel behandeln wir die Grundgesetze der Fluid- oder Hydrodynamik. Allgemeine Beschreibungen der Dynamik fluider Systeme liefern die Gleichungen von Euler und Navier-Stokes. Damit erhalten wir die Grundlage zur Beschreibung der internen Dynamik von natürlichen aquatischen Systemen. Strömungen in Oberflächengewässern sind turbulent. Eine wichtige Methode zur Analyse des turbulenten Strömungsfeldes sowie des Stofftransportes besteht in der Separation von Strömungen auf großen räumlichen Skalen und Turbulenz auf kleinen Skalen.

## 3.1 Strömungen und Turbulenz

Strömungen in Oberflächengewässern sind kompliziert und verändern sich fortwährend. Diese Eigenschaft macht sie in einem gewissen Sinne auch einfach: Interessieren wir uns nur für die langzeitliche Wirkung der Strömungen, z.B. für den mittleren vertikalen Wasseraustausch in einem See oder die Strömung entlang eines Flusses, so hilft uns eine statistische Betrachtungsweise, wonach die Bedeutung von „Einzelereignissen“ umso stärker hinter dem mittleren Verhalten des Systems zurücktritt, je mehr solcher „Ereignisse“ am Vorgang beteiligt sind.

Die Existenz von „Strömungsereignissen“ hängt damit zusammen, dass Strömungen in Oberflächengewässern nie laminar, sondern immer turbulent sind. Das bedeutet, dass sich benachbarte Wasserpakete nicht auf gleichmäßig nebeneinander her laufenden Stromlinien bewegen (wie das etwa in einer durchströmten engen Röhre bei kleinen Geschwindigkeiten der Fall wäre), sondern durch unregelmäßig auftretende Wirbel plötzlich getrennt werden und schließlich vollkommen verschiedene Wege gehen. Diese Wirbel sind von unterschiedlichster Größe und existieren nicht als ewige Objekte, sondern stehen in ständigem Wandel. Im Meer kann man heute dank modernster Messmethoden Wirbel mit Durchmessern von einigen hundert Kilometern identifizieren, die sich beispielsweise vom Golfstrom gelöst haben und dann wie große Wirbelstürme während Wochen herumwandern (Abb. 3.1). In Seen nehmen die größten Wirbel das ganze Seebecken ein. Die kleinsten Wirbel sind sowohl im Meer als auch in Seen nur einige Millimeter oder Zentimeter groß.

Weil Flüssigkeiten viskos sind, d.h. eine innere Reibung aufweisen, wird in noch kleineren Strukturen die ganze Bewegungsenergie innerhalb kürzester Zeit in Wärme umgewandelt. Die kinetische Energie ist proportional zum Volumen des Wirbels, die Reibung proportional zur Oberfläche. Grosse Wirbel haben ein günstigeres Verhältnis von Volu-

men zu Oberfläche und überleben somit länger. Letztendlich aber ist das Schicksal jeder Strömungsenergie die Umwandlung in Wärme infolge der Viskosität der Flüssigkeit. Der berühmte Hydromechaniker L. F. Richardson hat diesen Sachverhalt so umschrieben:

„Große Wirbel besitzen kleine Wirbel, welche an ersteren Geschwindigkeit nagen. Und kleine Wirbel haben noch kleinere Wirbel. Und so weiter ... bis zur Viskosität.“

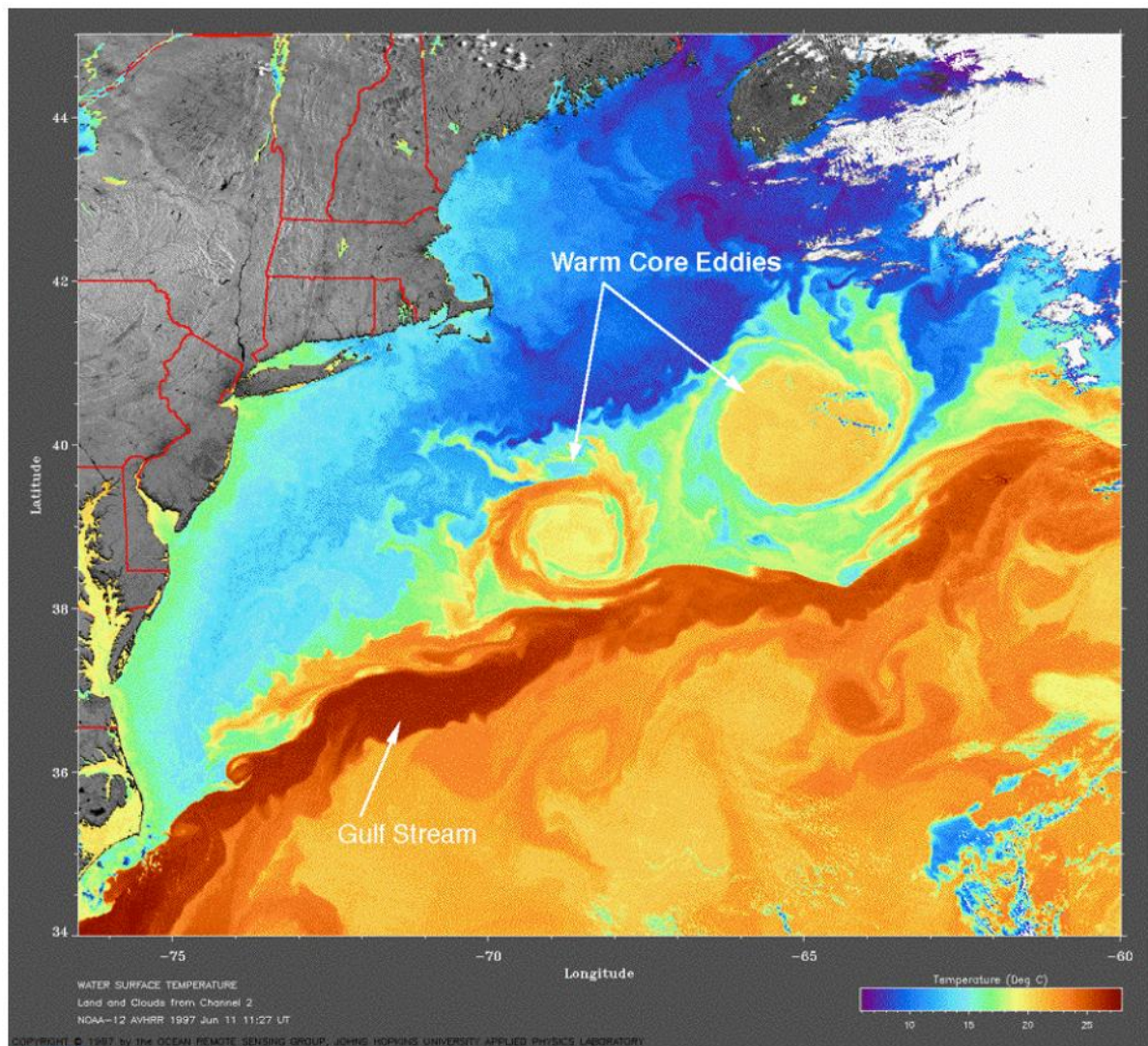


Abb. 3.1: Der Golfstrom mit seinen Wirbeln im Satellitenbild der Oberflächentemperaturen.

Die Verteilung der Strömungsenergie (kinetische Energie) in verschiedene Größen- bzw. Zeitklassen nennt man das *Spektrum* der Turbulenz. Die größten Strömungsenergien finden sich bei den großen Wirbeln. Zu den kleineren Wirbeln hin nimmt die Energie

nach einem Potenzgesetz ab. Der Übergang von kinetischer in thermische Energie heißt *Energiedissipation*.

Was man *Turbulenz* nennt, stellt eigentlich ein zeitlich und räumlich variables Strömungsfeld dar, das man im Prinzip mit den Grundgleichungen der Hydrodynamik beschreiben könnte. Praktisch ist das aber genauso ausgeschlossen wie die Beschreibung der Trajektorien der rund  $6 \cdot 10^{23}$  Moleküle in einem Mol Gas. Ebenso wie in der Thermodynamik kann man auch bei der Turbulenz das Problem mit Hilfe einer statistischen Betrachtungsweise umgehen. Dazu muss man die Strömung an einem fixen Ort über längere Zeit messen und aus diesen Zeitreihen Mittelwert und Varianz bestimmen.

Der zeitliche *Mittelwert der Geschwindigkeit*  $\bar{v}$  ist ein Maß für die langfristige, großräumige Struktur der Strömung, der zeitliche Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeit im Quadrat, d. h. die *Varianz*  $\bar{v}^2$ , ist ein Maß für die Turbulenz. Im Vergleich zu den momentanen Strömungsgeschwindigkeiten ist  $\bar{v}$  meistens klein und insbesondere für vertikale Strömungskomponenten oft kaum von null verschieden.

## 3.2 Grundgleichungen der Fluiddynamik

Anstelle von Massenpunkten oder starren Körpern in der klassischen Mechanik betrachtet man in der Fluiddynamik Volumenelemente des Fluidums (Flüssigkeit oder Gas). Anstelle der Masse  $m$  eines Körpers tritt die Masse eines Volumenelementes bzw. die Dichte  $\rho = m/V$  des Fluids. Die meisten Gesetzmäßigkeiten, die wir im Folgenden diskutieren, gelten ganz allgemein für fluide Phasen. Da wir uns aber auf den Spezialfall der Hydrodynamik konzentrieren, sprechen wir oft von Wasser oder Flüssigkeit anstelle von Fluid und von Wasserpaketen anstatt Volumenelementen.

Zur Beschreibung der Hydrodynamik wird meistens ein (mathematisch positiv orientiertes) 3-dimensionales kartesisches Koordinatensystem verwendet, welches am Ort der Betrachtung durch die drei Achsen *Ost* ( $x$ -Achse), *Nord* ( $y$ -Achse), und *Aufwärts* ( $z$ -Achse) definiert ist. Ein solches kartesisches System ist aufgrund der Erdkrümmung nur lokal definiert und folgt der Erdrotation. Für gewisse Betrachtungen braucht man im Gegensatz zum lokalen auch ein absolutes Koordinatensystem, z.B. bei der Herleitung der Coriolisbeschleunigung.

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Bewegung einer Flüssigkeit im lokalen Koordinatensystem mathematisch zu beschreiben. In der ersten Betrachtungsweise, der so genannten *Lagrange'schen Darstellung*, wird die zeitliche Variation der Systemvariablen (Geschwindigkeit, Druck, Dichte etc.) in einem ausgewählten, sich durch den Raum bewegenden Flüssigkeitselement beschrieben. In der zweiten Betrachtungsweise, der *Euler'schen Darstellung*, werden die dynamischen Gleichungen der Systemvariablen für einen im Raum fixierten Punkt formuliert.

Betrachten wir eine skalare Eigenschaft  $f = f(\mathbf{x}, t)$  (z. B. Temperatur, Dichte, Konzentration) eines Wasserpaketes  $P$  am Ort  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$ . Wenn sich das Wasser gegenüber dem festen Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, so beschreibt die totale Ableitung nach der Zeit ( $df/dt$ ) die zeitliche Änderung von  $f$  im bewegten Wasserpaket, die partielle Ableitung nach der Zeit ( $\partial f/\partial t$ ) die zeitliche Änderung von  $f$  am

festen Ort.

**a** Lagrange'sche Darstellung:

Dynamik der Systemvariablen in einem sich im Raum bewegenden Wasserpaket P. Beschreibung der Strömung durch die zeitliche Entwicklung des Ortes  $\mathbf{x}_P(t)$ .

Lagrange'sche Ableitung:

$\frac{df}{dt}$ : Zeitliche Veränderung der Eigenschaft  $f$  innerhalb eines festen Wasserpaketes.

**b** Euler'sche Darstellung:

Dynamik der Systemvariablen an festen Punkten im Raum. Beschreibung der Strömung durch die zeitliche Entwicklung des lokalen Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ .

Euler'sche Ableitung:

$\frac{\partial f}{\partial t}$ : Zeitliche Veränderung der Eigenschaft  $f$  an einem festen Ort.

Beachte: In der Dynamik starrer Körper beschreibt man die Bewegung analog zur Lagrange'schen Darstellung. Entsprechend gelten die Grundgleichungen und -gesetze der klassischen Dynamik (z.B. Impuls- und Massenerhaltung) in der Lagrange'schen Beschreibung. Die Messungen von Strömungen und andern Parametern in fluiden Systemen geschehen aber meist an festen Orten (fest montierte Messinstrumente). Für die Herleitung der Bewegungsgleichungen für Flüssigkeiten ist daher das Lagrange'sche System nützlich, für die praktische Anwendung müssen die Gleichungen jedoch ins Euler'sche System transformiert werden.

Die beiden Darstellungen können durch folgende Gleichung in Bezug gebracht werden:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y + \frac{\partial f}{\partial z} v_z \quad (3.1)$$

wobei  $v_x, v_y, v_z$  die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}$  sind. Gl. 3.1 kann mit  $\nabla f \equiv \text{grad}f$  kurz geschrieben werden:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (3.2)$$

Der durch die Gl. 3.1 bzw. 3.2 ausgedrückte Zusammenhang kann auf vektorielle Größen verallgemeinert werden, indem er auf jede Komponente des Vektors angewandt wird. Insbesondere gilt für jede Komponente  $v_i$  ( $i = x, y, z$ ) des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{v}$ :

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \quad (3.3)$$

Die für Vektoren gültige Form von Gl. 3.2 angewandt auf die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  lautet somit:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (3.4)$$

wobei der Term  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  als komponentenweise Anwendung des Operators  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$  auf  $\mathbf{v}$  zu verstehen ist (sog. *Vektorgradient*).

Der erste Term auf der rechten Seite von Gl. 3.4 heißt Ortsbeschleunigung. Er beschreibt die Beschleunigung an einem festen Ort infolge der Wirkung einer Kraft in der Euler'schen Darstellung. Der zweite Term wird Feldbeschleunigung genannt. Die Feldbeschleunigung beschreibt die Geschwindigkeitsänderung eines Wasserpaketes aufgrund seiner Bewegung durch das inhomogene Strömungsfeld.

Allgemein kann man auch die Lagrange'sche (totale) Ableitung als Operator auffassen, die so genannte advektive Ableitung:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.5)$$

### 3.2.1 Inkompressibilität und Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung)

Für die Behandlung der meisten hydrodynamischen Fragen darf das Wasser als *inkompressibel* angenommen werden (unter Benutzung von 3.2):

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (3.6)$$

Beachte: Mit der Annahme der Inkompressibilität fallen gewisse Phänomene weg, insbesondere die Beschreibung der Schallausbreitung im Wasser. Gl. 3.6 schließt jedoch Dichteveriationen im Raum nicht aus, denn weder  $\nabla \rho$  noch  $\partial \rho / \partial t$  müssen einzeln null sein. Da aber räumliche Dichteveriationen meist klein sind ( $\delta \rho / \rho < 10^{-2}$ ), kann man deren Einfluss auf die *träge Masse* (Beschleunigung) sehr wohl vernachlässigen, im Allgemeinen aber nicht deren Einfluss auf das *Gewicht* (Auftrieb/Abtrieb). Konkret: Dichteschichtung, Auftrieb etc. müssen in den Gleichungen berücksichtigt werden, nicht aber der Einfluss der räumlichen Dichteveriation auf die Beschleunigung unter der Wirkung einer bestimmten Kraft. Diese Annahme nennt man die *Boussinesq Approximation*.

Da Masse weder erzeugt noch vernichtet wird, ändert sich der Masseninhalt eines Testvolumens nur durch eine nicht verschwindende Bilanz von Massenzu- und -abfluss. Die Massenstromdichte ist gegeben durch das Produkt  $\rho \mathbf{v}$  von Dichte und Geschwindigkeit. Das Prinzip der Massenerhaltung, angewandt für Wasser in einem Testvolumen (Volumen  $V$ , Oberfläche  $A$ ), lautet somit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_A \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} \quad (3.7)$$

Auf der linken Seite kann man die Zeitableitung ins Integral hinein ziehen. Auf der rechten Seite kann man den Gauß'schen Satz (auch Divergenz-Theorem genannt) anwenden. Damit erhält man:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV \quad (3.8)$$

Gleichung 3.8 in differentieller Schreibweise ergibt die Massenerhaltungs- oder Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.9)$$

Mit  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \equiv \text{div} (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = \rho \cdot \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \rho$  und der Bedingung der Inkompressibilität (Gl. 3.6) folgt die wichtige Beziehung:

$$\text{div} \mathbf{v} \equiv \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.10)$$

Gleichung 3.10 besagt, dass das Geschwindigkeitsfeld in einem inkompressiblen Fluid divergenzfrei ist. Das ist eine direkte Folge der Massenerhaltung für das fluide Medium (in unserem Fall Wasser).

Während die Strömung in Oberflächengewässern fast immer als divergenzfrei betrachtet werden kann, ist dies im Falle von Grundwasser oft nicht angebracht. In diesem Fall betrachtet man ein Kontrollvolumen, das außer Wasser auch eine feste Matrix (z. B. Sand) enthält. Durch Kompression der Matrix kann zusätzliches Wasser im Kontrollvolumen gespeichert werden (was durch einen Speicherkoeffizienten  $S$  beschrieben wird). Außerdem ist die externe Entnahme (oder Zugabe) von Wasser aus dem Kontrollvolumen durch Brunnen ein häufiger und wichtiger Fall. Er kann durch Einführung eines Quelltermes  $Q$  (Wasserzugabe pro Volumen und Zeit) beschrieben werden. Gl. 3.9 wird dann zu:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = Q \quad [\text{kg m}^{-3} \text{ s}^{-1}] \quad (3.11)$$

Mit der Annahme von Inkompressibilität (und vernachlässigbarer Speicherung) folgt:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv \text{div} \mathbf{v} = \frac{Q}{\rho} \quad [\text{s}^{-1}] \quad (3.12)$$

Die Forderung der Massenerhaltung lässt sich auch auf im Wasser gelöste Stoffe anwenden. Die obige Herleitung kann völlig analog mit der Stoffkonzentration  $C$  anstelle der Dichte  $\rho$  durchgeführt werden, solange der Stoffaustausch durch molekulare Diffusion vernachlässigt wird. In diesem Fall gilt analog zu Gl. 3.11 folgende Massenbilanzgleichung für gelöste Stoffe:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \mathbf{v}) = J \quad [\text{kg m}^{-3} \text{ s}^{-1}] \quad (3.13)$$

wobei der Quellterm  $J$  die *in situ* Produktion des Stoffes pro Volumen und Zeit beschreibt. Im Falle der divergenzfreien Strömung ( $\text{div} \mathbf{v} = 0$ ) folgt mit Anwendung von Gl. 3.2:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = \frac{dC}{dt} = J \quad (3.14)$$

### 3.2.2 Bewegungsgleichungen für Wasser

Die Bewegung einer Flüssigkeit wird im Prinzip von den gleichen Bewegungsgesetzen bestimmt wie diejenige eines starren Körpers. Danach ist die Bewegung ohne Wirkung von äußeren Kräften geradlinig. Kräfte führen zu Geschwindigkeitsänderungen, d.h. zu Beschleunigungen. Trotzdem sind die Bewegungsgleichungen von Flüssigkeiten ungleich komplizierter als diejenigen starrer Körper. Dies rührt daher, dass die Bewegung einzelner Flüssigkeitspakete untereinander gekoppelt ist: benachbarte Flüssigkeitspakete „spüren einander“. Die Größen, welche diese Interaktion vermitteln, sind Druck und innere Reibung. Der Druck ist dafür verantwortlich, dass sich eine Flüssigkeit im Allgemeinen so bewegt, dass - außer in extremen Fällen - kein „leerer Raum“ entsteht (Kontinuitätsgleichung).

Wirkt eine Kraft  $\mathbf{F}$  auf ein Volumenelement  $V$ , so schreibt sich das zweite Newton'sche Gesetz in der Lagrange'schen Darstellung:

$$\mathbf{F} = \rho V \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.15)$$

Im Weiteren ist es nützlich, nicht die Kraft selber, sondern die Kraft pro Volumen (Kraftdichte  $\mathbf{f}^* = \mathbf{F}/V$ ) oder auch die Kraft pro Masseneinheit oder einfach Beschleunigung ( $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = \mathbf{F}/\rho V$ ) zu betrachten. Damit und unter Anwendung von Gl. 3.4 erhalten wir:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (3.16)$$

Die konkreten Bewegungsgleichungen für natürliche Gewässer erhalten wir nun durch Einsetzen der effektiv vorkommenden Kräfte.

**a) Schwerkraft** Selbstverständlich wirkt auf ein Wasserpaket auf der Erde immer die Schwerkraft  $\mathbf{F}_G$  in negativer z-Richtung:

$$\mathbf{F}_G = -\rho V g \hat{z} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}_G = -g \hat{z} \quad (3.17)$$

wobei  $\hat{z} = (0,0,1)$  der Einheitsvektor in z-Richtung ist. Die geringfügigen Variationen der Erdbeschleunigung  $g$  in der Nähe der Erdoberfläche können im Allgemeinen vernachlässigt werden.

**b) Druckgradientenkraft** Weitere ziemlich offensichtliche Kräfte in einem Wasserkörper sind Druckkräfte. In einem homogenen Druckfeld wirkt allerdings auf ein Volumenelement  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  keine resultierende Kraft, da sich die Drücke von allen Seiten kompensieren. Eine resultierende Kraft tritt nur auf, wenn ein Druckgradient vorliegt. Besteht z. B. in z- Richtung ein Druckunterschied  $dp = (\partial p / \partial z) \cdot dz$ , so entsteht eine Kraftdifferenz  $dF = -dp \cdot dx \cdot dy = -(\partial p / \partial z) \cdot dV$  (s. Abb. 3.2. In drei Dimensionen ergibt sich für die Druckgradientenkraft:

$$\mathbf{F}_p = -V \nabla p \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.18)$$

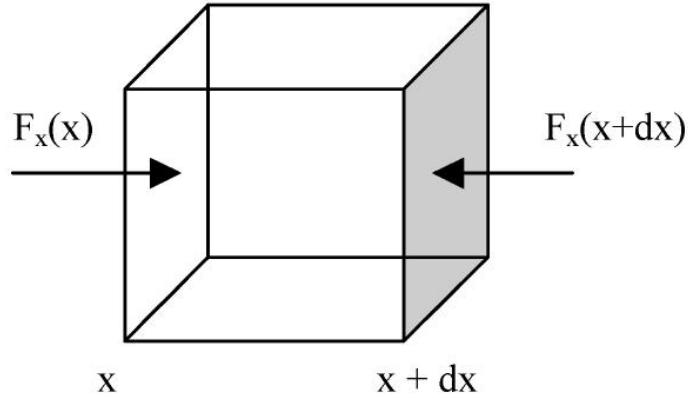


Abb. 3.2: Ein Volumenelement mit den Druckkräften in x-Richtung.

Ein spezieller Druckgradient in Gewässern auf der Erde ist der hydrostatische, der als Folge der Schwerkraft entsteht (und verhindert, dass ein Wasserpaket aufgrund der Schwerkraft ins Bodenlose fällt). Er ergibt sich durch gleichsetzen der Schwerkraft und Druckgradientenkraft (keine Beschleunigung) in z-Richtung:

$$a_{p,z} = -a_{G,z} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_{hyd} = -g\rho \quad (3.19)$$

Mit den beiden bisher eingeführten Kräften können bereits diverse Situationen in natürlichen aquatischen Systemen hinreichend gut beschrieben werden. Die Lagrange'sche Beschleunigung hat in diesem Fall folgende Form:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{a}_G + \mathbf{a}_p) = -g\hat{z} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (3.20)$$

In der Euler'schen Darstellung ergibt sich mit Gl. 3.16 folgende Bewegungsgleichung (die so genannte Euler'sche Gleichung):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - g\hat{z} - \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (3.21)$$

Die Euler'sche Gleichung 3.21 beschreibt den Fall einer *reibungslosen* Flüssigkeit in einem *Inertialsystem* (keine Erdrotation).

Wegen der Multiplikation der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  mit den Gradienten der Geschwindigkeitskomponenten  $v_i$  im Feldbeschleunigungsterm ist diese Gleichung nichtlinear und besitzt höchstens für Spezialfälle analytische Lösungen. Die Nichtlinearität bedingt ferner, dass die Linearkombination von zwei partiellen Lösungen selbst nicht notwendigerweise eine Lösung darstellt. Dies verhindert z.B. die Aufteilung des Strömungsvektors in einzelne harmonische Komponenten. Das bedeutet, dass Wellen verschiedener Frequenz bzw. Wellenlänge miteinander gekoppelt sind.

**c) Reibungskraft** Im Gegensatz zur Druckkraft wirkt die Reibungskraft nicht senkrecht, sondern tangential zu den Oberflächen eines gedachten Wasserpaketes (sog. Schub- oder Scherkraft). Bei der Besprechung der Viskosität in Kap. 1.4 haben wir die Schubspannung  $\tau$  für eine Strömung in x-Richtung mit Gradienten in z-Richtung bereits eingeführt (Gl. 1.8). Wir wollen die Betrachtung hier noch etwas verallgemeinern.

Wie in Kap. 1.4 angesprochen, beschreibt die Viskosität den Impulsaustausch infolge der molekularen Diffusion von Wassermolekülen in angrenzende Schichten mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. Wir bezeichnen mit  $\tau_{xz}$  die Schubspannung in x-Richtung aufgrund eines Gradienten von  $v_x$  in z-Richtung ( $\partial v_x / \partial z$ ):

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z} = \nu \rho \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (3.22)$$

Durch die Schubspannung entsteht ein dem Geschwindigkeitsgradienten entgegengesetzter Impulstransport (genau genommen ist es die x-Komponente der Impulsdichte,  $\rho v_x$ , die von Schichten mit höherer Dichte zu solchen mit niedrigerer Dichte diffundiert). Durch Verallgemeinerung in alle Strömungs- und Scherungsrichtungen lässt sich ein Spannungstensor mit Elementen  $\tau_{ij}$  herleiten, der im allgemeinsten Fall auch den Druck als Normalkraft enthält. Die detaillierte Behandlung des Spannungstensors ist ziemlich kompliziert und übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung. Wir leiten im Folgenden nur einen Ausdruck für die Reibungskraft in einem inkompressiblen Fluid her. Dazu betrachten wir ein Volumenelement, dass sich in einem inhomogenen Strömungsfeld in x-Richtung bewegt (s. Abb. 3.3).

Aufgrund der nach oben hin ansteigenden Geschwindigkeit  $v_x$  wirkt auf die obere Deckfläche des in Abb. 3.3 gezeigten Volumenelementes eine Kraft in x-Richtung. Es fließt „x-Impuls“ ( $\rho v_x$ ) von der darüber liegenden, schneller strömenden Schicht, nach unten, so dass die Fläche beschleunigt wird. Hingegen wird auf den Boden des in Abb. 3.3 gezeigten Volumenelementes durch die darunter liegende, langsamer strömende Schicht eine Kraft in entgegengesetzter Richtung ausgeübt. Es fließt ja x-Impuls aus der betrachteten Fläche nach unten ab, so dass diese abgebremst wird.

Die resultierende Kraft auf ein Volumenelement in x-Richtung erhalten wir im oben definierten Fall aus einer analogen Überlegung wie wir sie bei der Druckkraft gemacht haben (vgl. Abb. 3.2 und 3.3). Auf das Volumenelement  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  wirkt in x-Richtung die resultierende Reibungskraft (Summe der oben und unten angreifenden Kräfte)  $F_x = (\partial \tau_{xz} / \partial z) \cdot dV$ . Mit Gl. 3.22 erhalten wir die x-Komponente der Reibungskraft aufgrund einer vertikalen Scherung:

$$F_{R,x} = V \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = V \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \rho \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad \text{bzw.} \quad a_{R,x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (3.23)$$

wobei beim Übergang von der Kraft  $\mathbf{F}$  auf die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  bereits die Annahme bzw. Näherung gemacht wurde, dass  $\rho$  räumlich konstant sei. Unter der

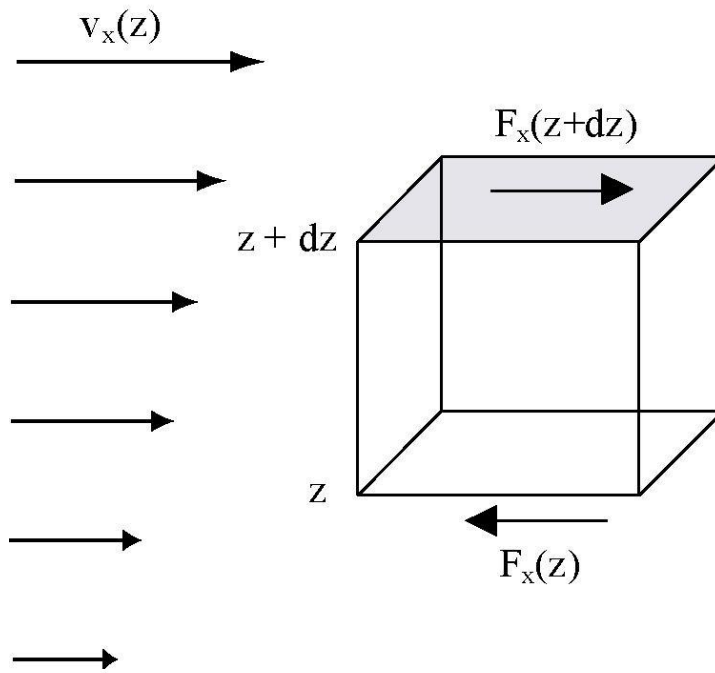


Abb. 3.3: Ein Volumenelement mit den Schubspannungskräften in x-Richtung aufgrund von Geschwindigkeitsgradienten in z-Richtung.

weiteren Annahme, dass auch die kinematische Viskosität  $\nu$  nicht vom Ort abhängt, lässt sich der Ausdruck weiter vereinfachen zu

$$a_{R,xz} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (3.24)$$

Die gesamte x-Komponente der Reibungskraft aufgrund von Scherung in alle Richtungen ergibt sich unter den getroffenen Annahmen zu:

$$a_{R,x} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \nu \cdot \nabla^2 v_x = \nu \cdot \Delta v_x \quad (3.25)$$

Im Sinne einer komponentenweisen Anwendung kann der Laplace-Operator  $\nabla^2 = \Delta$  auch auf den Vektor  $\mathbf{v}$  wirken (analog zum Vektorgradienten beim Feldbeschleunigungsterm), so dass wir die Reibungskraft schreiben können als:

$$\mathbf{a}_R = \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{v} = \nu \cdot \Delta \mathbf{v} \quad (3.26)$$

**d) Corioliskraft** Die bisher besprochenen Kräfte beschreiben die physikalischen Kräfte in einem Fluid in einem Inertialsystem vollständig. Da unser Koordinatensystem (s. Abb. 3.4) aber mit der Erde rotiert, müssen Trägheitskräfte berücksichtigt werden, die sich aus der Koordinatentransformation von einem Inertialsystem ins

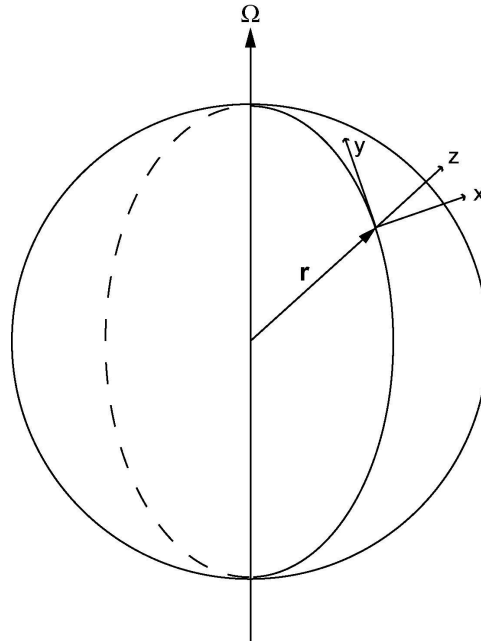


Abb. 3.4: Koordinatensysteme zur Herleitung der Corioliskraft.

rotierende System ergeben. Dabei ist nur die Corioliskraft von Bedeutung, die kleinen Zentrifugalkräfte können als Korrekturen der Gravitationskraft aufgefasst werden.

Die Erdrotation wird beschrieben durch einen Rotationsvektor  $\Omega$  mit dem Betrag  $\omega = 2\pi$  pro Tag  $= 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Für einen Ort auf der Erdoberfläche mit der geographischen Breite  $\varphi$  ist der Rotationsvektor im lokalen kartesischen Koordinatensystem gegeben durch:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cdot \cos \varphi \\ \omega \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Die Corioliskraft auf ein Volumenelement mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  (im rotierenden Koordinatensystem) ist:

$$\mathbf{F}_C = -2\rho V \cdot (\Omega \times \mathbf{v}) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}_C = -2(\Omega \times \mathbf{v}) \quad (3.28)$$

Ausgeschrieben in Komponenten lautet die Coriolisbeschleunigung:

$$\mathbf{a}_C = -2\omega \begin{pmatrix} v_z \cos \varphi - v_y \sin \varphi \\ v_x \sin \varphi \\ -v_x \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Oft ist es sinnvoll, nur horizontale Strömungen und Kräfte zu betrachten. Die in

der Horizontalen wirkende Corioliskraft lautet dann (mit  $v_z = 0$ ):

$$\mathbf{a}_{C,h} = -2\omega \begin{pmatrix} -v_y \sin \varphi \\ v_x \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Daraus kann man ersehen, dass auf der Nordhalbkugel ( $\sin \varphi > 0$ ) die Strömung immer nach rechts abgelenkt wird (z. B.  $v_y > 0$  ergibt  $a_{c,x} > 0$ , usw.).

Damit haben wir alle Kräfte zusammen. Die komplette Bewegungsgleichung für eine viskose Flüssigkeit in einem lokalen Koordinatensystem auf der Erde lautet somit:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -g\hat{\mathbf{z}} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - 2(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) \quad (3.31)$$

Das ist die *Navier-Stokes-Gleichung*. Genau wie die Euler'sche Gleichung ist sie nicht-linear und somit schwierig zu lösen. Auch führt die Nichtlinearität zur Kopplung von Strömungen auf unterschiedlichen Skalen, was eine einfache Beschreibung turbulenter Strömungsfelder erschwert. Darum ist die Navier-Stokes-Gleichung in allgemeiner Form nicht unbedingt geeignet, die wesentlichen Eigenschaften der Strömungsfelder in Oberflächengewässern zu untersuchen.

Wir wollen im Folgenden die Frage angehen, durch welche Näherung die Kopplung zwischen groß- und kleinskaligen Bewegungen aufgelöst werden kann. Anders gefragt: Gibt es eine mathematische Theorie, mit welcher die langfristigen und großräumigen Strömungen analysiert werden können, ohne dass dabei die ganze Feinstruktur der kleinskaligen Turbulenz mitberücksichtigt werden muss? Ein solcher Ansatz, die Reynolds-Aufspaltung, wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

### 3.3 Turbulenz und Reynolds'sche Schubspannung

Für die weitere Behandlung der Strömung in Oberflächengewässern ist es nützlich, die Bewegungsgleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten einzeln zu schreiben. Das ist zwar weniger kompakt als die Vektorschreibweise, dafür aber oft besser verständlich. Außerdem ist es sinnvoll, zwischen horizontalen Strömungen ( $v_x, v_y$ ) und vertikalen Strömungen ( $v_z$ ) zu unterscheiden, da zwischen diesen Raumrichtungen eine Anisotropie besteht. Aufgrund der Schwerkraft stellt sich in vertikaler Richtung ein Druckgradient und meist auch ein Dichtegradient ein, was in den horizontalen Richtungen nicht oder nur in geringerem Maß der Fall ist. Auch sollte man sich bewusst sein, dass Ozeane, Seen, und auch Grundwasserleiter flache Objekte sind, das heißt eine weit größere horizontale Ausdehnung als Tiefe besitzen.

Wir schreiben zunächst die Navier-Stokes-Gleichung in der Euler'schen Darstellung unter Vernachlässigung der inneren Reibung in Komponenten:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2\omega(v_z \cos \varphi - v_y \sin \varphi) \quad (3.32a)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega v_x \sin \varphi \quad (3.32b)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -g - 1\rho \frac{\partial p}{\partial z} + 2\omega v_x \cos \varphi \quad (3.32c)$$

Wie erwähnt erschweren die nichtlinearen Terme der Form  $v_x(\partial v_x/\partial x)$  etc. die Suche nach analytischen Lösungen und koppeln Bewegungen unterschiedlichster Größe miteinander. Zur Beschreibung der großräumigen Strömung (wobei die Bedeutung von „großräumig“ später genauer definiert wird) spaltet man daher die Geschwindigkeiten  $v_i$  auf in ihren zeitlichen Mittelwert  $V_i$  und die turbulenten Fluktuationen  $v'_i$  (Reynolds-Aufspaltung):

$$v_i = V_i + v'_i \quad \text{mit } i = x, y, z \quad (3.33)$$

wobei der zeitliche Mittelwert der Fluktuationen  $\overline{v'_i} = 0$  ist und  $V_i = \overline{v_i}$  genauer definiert wird durch:

$$V_i = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v_i(t) dt \quad (3.34)$$

Natürlich ist diese Aufspaltung nicht eindeutig, da sowohl der Mittelwert  $V_i$  als auch die Fluktuationen  $v'_i$  von der Länge des Mittelungsintervalles  $\tau$  abhängen. Falls  $v_i$  keinen Langzeit-Trend besitzt, wird jedoch der Mittelwert  $V_i$  von  $\tau$  unabhängig, sobald  $\tau$  deutlich größer ist als die charakteristische Periode  $\tau_0$ , mit welcher zeitliche Variationen im System auftreten. Neben dem zeitlichen Mittel kann auch ein räumliches Mittel sowie ein Ensemble Mittel (über  $N$  identische Experimente) gebildet werden. Für homogene und stationäre (statistisch keine zeitliche Änderung) Turbulenz gilt die ergodische Bedingung die besagt, dass die drei Mittel gleich sind.

Wir führen nun die Reynolds-Aufspaltung in mehreren Schritten für die nichtlinearen Terme in den Bewegungsgleichungen durch.

**1.Schritt: Symmetrisierung** Zunächst zeigen wir, dass mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Medium (Gl. 3.10,  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ) die nichtlinearen Terme in eine symmetrische Form gebracht werden können. Es ist nämlich (mit  $i, j = x, y, z$ ):

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) = \sum_j \left( v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_i \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \sum_j v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.35)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite (und damit auch der symmetrische Term links) beschreibt gerade die nichtlinearen Terme für die Geschwindigkeitskomponente  $v_i$ .

**2.Schritt: Reynolds-Aufspaltung** Nun wenden wir die Reynolds-Aufspaltung auf den symmetrischen Ausdruck für die nichtlinearen Terme an:

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (V_i + v'_i)(V_j + v'_j) \right) = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( V_i V_j + v'_i v'_j + V_i v'_j + V_j v'_i \right) \quad (3.36)$$

**3. Schritt: Erneute Mittelwertbildung** Bei der zeitlichen Mittelung von Gl. 3.36 ist zu beachten, dass die Größen  $V_i$  und  $V_j$  ja bereits Mittelwerte sind und sich somit nicht mehr ändern. Sie können als Konstanten aus den Mittelungsintegralen herausgezogen werden, ebenso wie die Ableitungen. Außerdem gilt definitionsgemäß  $\overline{v'_i} = 0$  und  $\overline{v'_j} = 0$ . Somit ergibt sich:

$$\overline{\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j)} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{V_i V_j} + \overline{v'_i v'_j} + \overline{V_i v'_j} + \overline{V_j v'_i}) = \sum_j V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{v'_i v'_j}) \quad (3.37)$$

Dabei wurde auf der rechten Seite der symmetrische Ausdruck für die Mittelwerte  $V_i$  und  $V_j$  wieder durch den asymmetrischen Term ersetzt (unter Anwendung von Gl. 3.35 für die Mittelwerte).

Mit den bisherigen Umformungen haben wir scheinbar noch nicht viel erreicht: Die nichtlinearen Terme sind weiterhin vorhanden, nun einfach für die gemittelten Geschwindigkeiten, und es ist uns auch nicht gelungen, die turbulenten Fluktuationen  $v'_i$  und  $v'_j$  zum Verschwinden zu bringen. Entscheidend für den Erfolg des ganzen Unterfangens sind die nun folgenden Interpretationen der Terme in Gl. 3.37.

**4. Schritt: Nichtlineare Terme der mittleren Strömung vernachlässigen** In einer turbulenten Strömung kommen große Geschwindigkeitsvariationen auf kleinem Raum vor, weshalb die nichtlinearen Terme bedeutend sind. Zwei Wasserpakete, die am Anfang benachbart sind, werden aufgrund der starken Variabilität der Feldbeschleunigung (nichtlineare Terme) ganz unterschiedlichen Trajektorien folgen. Dies ist für die zeitlich gemittelte Strömung, von der die kleinräumige Turbulenz abgespalten ist, nicht mehr der Fall. Entsprechend dürfen wir die nichtlinearen Terme für die gemittelten Geschwindigkeitskomponenten vernachlässigen:

$$V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = 0 \quad (3.38)$$

**5. Schritt: „Schließungs-Schritt“ (closure step)** Die entscheidende (und motivierende) Idee hinter der Reynolds-Aufspaltung ist letztlich, dass die kleinskalige Turbulenz für die mittlere Strömung dieselbe Rolle spielt wie die molekulare Viskosität im Falle einer laminaren Strömung. Molekulare Diffusion einzelner Moleküle transportiert Impuls in alle Richtungen, was in der Schubspannung zum Ausdruck kommt. Analog transportieren Wirbel Impuls im turbulenten Strömungsfeld. Wir interpretieren die noch verbliebenen Terme mit den turbulenten Fluktuationen als Reibungskräfte auf die gemittelte Strömung, gemäß folgendem Ansatz:

$$\overline{v'_i v'_j} = -A_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (3.39)$$

Ein solcher Term heißt *Reynolds-stress* in Analogie zur Schubspannung (shear stress)  $\tau_{ij}$ . Der Koeffizient  $A_{ij}$  ist analog zur Viskosität und heißt entsprechend *eddy viscosity* (eddy = Wirbel), in Deutsch Eddy Viskosität, turbulente Viskosität, oder

auch turbulenter Austauschkoeffizient genannt. Insgesamt erscheinen die nichtlinearen Terme also wieder als Ausdrücke, die aussehen wie die Reibungsterme, nur dass anstelle der molekularen Viskosität  $\nu$  die viel größeren Eddy Viskositäten  $A_{ij}$  auftreten.

Bei der Betrachtung großräumiger Strömungen kann die vertikale Geschwindigkeit oft gegenüber den horizontalen Komponenten vernachlässigt werden ( $V_z \approx 0$ ). Aus der Kombination der Gl. 3.32 mit den Gl. 3.37 - 3.39 erhält man die 2-dimensionalen, linearisierten Bewegungsgleichungen in einem rotierenden Bezugssystem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fV_y + \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{xx} \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( A_{xy} \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( A_{xz} \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fV_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( A_{yx} \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( A_{yy} \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( A_{yz} \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (3.40)$$

wobei zur Abkürzung der Coriolis-Parameter  $f$  eingeführt wurde:

$$f = 2\omega \sin \varphi \quad (3.41)$$

Oft wird angenommen, dass die Turbulenz horizontal isotrop ist, sich jedoch von der vertikalen Turbulenz unterscheidet. Die Koeffizienten der horizontalen und vertikalen Eddy Viskosität werden daher je als konstant angenommen:

$$\begin{aligned}A_{xx} = A_{xy} = A_{yx} = A_{yy} &\equiv A_h = \text{const.} \\ A_{xz} = A_{yz} &\equiv A_z = \text{const.}\end{aligned}\quad (3.42)$$

Zur weiteren Vereinfachung schreiben wir in der Folge die Komponenten der mittleren Geschwindigkeit als  $(u, v, w)$  statt  $(V_x, V_y, V_z)$ . Weiter definieren wir den horizontalen Laplace-Operator:

$$\nabla_h^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.43)$$

Damit erhalten wir schließlich die folgenden zwei linearisierten Gleichungen zur Beschreibung horizontaler Strömungen in Oberflächengewässern:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + A_h \nabla_h^2 u + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + A_h \nabla_h^2 v + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (3.44)$$

Gleichungen vom Typ 3.40 oder 3.44 bilden den Ausgangspunkt der meisten Modelle zur Beschreibung der Ozeanzirkulation. Wir benutzen Gl. 3.44 im nächsten Abschnitt, um einige wesentlichen Merkmale dieser Zirkulation zu diskutieren. Zunächst wollen wir noch etwas genauer auf die Bedeutung und Größe der Eddy Viskositäten  $A_h$  bzw.  $A_z$  eingehen.

Der Ausdruck *eddy viscosity* bezieht sich auf den turbulenten Transport von Impuls. Wirbel transportieren aber auch andere Eigenschaften wie Temperatur und gelöste Stoffe. Man kann daher allgemeiner von *eddy diffusivity* (Eddy Diffusion, turbulente Diffusion) sprechen, wobei dann meist das Kürzel  $K$  statt  $A$  verwendet wird. Die Bedeutung der turbulenten Diffusion für den Transport in Oberflächengewässern werden wir in Kap. 4 erörtern. Vorerst betrachten wir nur die Strömung und bleiben daher bei der Bezeichnung turbulente Viskosität.

### 3.4 Großräumige Bewegungen ohne Reibung

Wir betrachten in diesem Abschnitt einige einfache Bewegungssituationen mit dem Ziel, die Größe der einzelnen Terme in den Bewegungsgleichungen abzuschätzen. Damit wird es möglich, den Begriff „großräumige Strömung“ quantitativ zu definieren.

**a) Bewegungsloser Zustand** Was sind die physikalischen Bedingungen für einen bewegungslosen Zustand ( $u = v = w = 0$  und  $\partial u/\partial t = \partial v/\partial t = \partial w/\partial t = 0$ )? Nach Gl. 3.44 bzw. 3.32 müsste gelten:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (3.45)$$

Die letzte dieser drei Gleichungen ist die hydrostatische Gleichung (vgl. 3.19). Ihre Integration ergibt:

$$p(z) = p_0 - g \int_0^z \rho(z') dz' \quad (3.46)$$

wobei  $p_0 = p(0)$  der Druck in der Tiefe  $z = 0$  ist. Oft definiert  $z = 0$  die Wasseroberfläche, dann ist  $p_0$  der Luftdruck.

Für  $\rho = \text{const.}$  führt Gl. 3.46 zu

$$p(z) = p_0 - g\rho z \quad (3.47)$$

Die ersten beiden Gleichungen in 3.45 besagen: Linien gleichen Druckes (Isobaren) müssen in einem bewegungslosen Wasserkörper horizontal sein. Dies bedeutet wegen Gl. 3.46, dass  $\rho$  nur eine Funktion der Tiefe  $z$  sein darf, was insbesondere auch die Bedingung für eine *ebene* (horizontale) Wasseroberfläche einschließt.

*Bemerkung:* Man sieht schon hier, dass es einen bewegungslosen Ozean nicht geben kann. Als Folge der unterschiedlichen Erwärmung des Wassers am Äquator und an den Polen hat beispielsweise das Wasser in der Tiefe  $z_0$  entlang eines Längengrades nicht überall die gleiche Temperatur, d.h. die Dichte variiert mit  $y$ :  $\partial\rho/\partial y \neq 0$ . Also folgt nach Gl. 3.46:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -g \int_0^z \frac{\partial\rho}{\partial y} \Big|_{z'} dz' \neq 0 \quad (3.48)$$

In (kleineren) Seen wäre theoretisch ein bewegungsloser Zustand möglich (z.B. unter Eis, falls keine Zuflüsse vorhanden sind), was aber kaum je beobachtet wird.

**b) Trägheitsströmungen** Nehmen wir an, eine äußere Kraft (Wind) habe das Wasser horizontal in Bewegung gesetzt und höre dann auf zu wirken. Falls keine horizontalen Druckgradienten vorhanden sind, gilt nach Gl. 3.44:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= fv + A_h \nabla_h^2 u + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -fu + A_h \nabla_h^2 v + A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (3.49)$$

Vernachlässigen wir vorerst die turbulente Reibung (Terme mit  $A_h$ ,  $A_z$ ). Mit der Anfangsbedingung  $u(t=0) = U$ ,  $v(t=0) = 0$  lautet die Lösung von 3.49:

$$\begin{aligned}u(t) &= U \cos(ft) \\ v(t) &= -U \sin(ft)\end{aligned}\quad (3.50)$$

Die Strömung beschreibt auf der Nord-Hemisphäre einen nach rechts drehenden Kreis mit der Periode  $T_0$  (Trägheitsperiode) und dem Radius  $r_0$  (Trägheitsradius):

$$T_0 = \frac{2\pi}{f}, \quad r_0 = \frac{U}{f}\quad (3.51)$$

Diese Gleichungen definieren für eine gegebene Strömungsgeschwindigkeit  $U$  eine zugehörige Zeit- und Längenskala. Typische Strömungsgeschwindigkeiten sind von der Größenordnung  $U \approx 0.1 \text{ m s}^{-1}$ , woraus mit  $f \approx 2\omega \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , folgt:  $T_0 \approx 10^5 \text{ s} \approx 1 \text{ d}$  und  $r_0 \approx 1000 \text{ m}$ . Wegen der relativ geringen Ausdehnung von  $\approx 1 \text{ km}$  ist es auch gerechtfertigt,  $f$  (bzw. die Breite  $\varphi$ ) als konstant anzunehmen. Andererseits ist die Ausdehnung eines solchen Trägheitskreises durchaus vergleichbar mit den Dimensionen vieler Seen (zumindest in einer Richtung), so dass sich Randeffekte bemerkbar machen. Ungestörte Trägheitsströmungen können nur in größeren Seen auftreten.

Mit Hilfe des Resultates 3.51 wollen wir nun prüfen, ob die Vernachlässigung der Reibungsterme in seiner Herleitung gerechtfertigt war. Dazu müssen wir die Größenordnung der in Gl. 3.49 vorkommenden Terme abschätzen. Dies bewerkstelligen wir wie schon bei schon zuvor durch Kombinationen der typischen Zeit-, Längen- oder Geschwindigkeitsskalen, welche dieselbe Dimension wie die betrachteten Terme haben.

Auf diese Weise kann  $\nabla_h^2 u \approx \nabla_h^2 v$  durch  $U/r_0^2$  abgeschätzt werden, also ist:

$$A_h \nabla_h^2 u \approx A_h \frac{f^2}{U}\quad (3.52)$$

Damit dies (absolut) viel kleiner ist als der Coriolisterm, müsste gelten:

$$A_h \frac{f^2}{U} \ll fU \Rightarrow A_h \ll \frac{U^2}{f}\quad (3.53)$$

Typische Werte für  $A_h$  und  $A_z$  sind (vgl. Pond and Pickard, [12]):

$$A_h \approx 10 \text{ bis } 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, \quad A_z \approx 10^{-5} \text{ bis } 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (3.54)$$

Mit  $f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  und  $U \approx 0.1 \text{ m s}^{-1}$  ist  $U^2/f \approx 100 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , d.h. die Bedingung 3.53 ist nicht immer erfüllt (das heißt auch: Die Dämpfung von Trägheitsströmungen kann signifikant sein!).

Für die vertikale Reibung ist eine Abschätzung schwieriger, weil die Ausbildung von vertikalen Strömungsgradienten stark von der Dicke der durchmischten Oberflächenschicht und dem „Alter“ der Anregung (Windereignis) abhängt. Nehmen wir z.B. als vertikale Längenskala  $H = 100 \text{ m}$ , so gilt:

$$A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx A_z \frac{U}{H^2} \quad (3.55)$$

Damit dies kleiner ist als der Coriolisterm, müsste gelten

$$A_z \frac{U}{H^2} \ll fU \Rightarrow A_z \ll H^2 f \approx 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \quad (3.56)$$

was gemäß 3.54 normalerweise zutrifft. Wäre hingegen (wie etwa in einem See)  $H \approx 10 \text{ m}$ , müsste  $A_z \ll 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  sein, was schon weniger wahrscheinlich ist.

Wie steht es mit den großräumigen nichtlinearen Strömungstermen aus, welche in Gl. 3.38 vernachlässigt worden sind? Schätzen wir die horizontalen Komponenten ab durch

$$V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \approx \frac{U^2}{r_0} = fU \quad (3.57)$$

so sind diese von der gleichen Größenordnung wie die Coriolisterme.

Zusammenfassend: Trägheitsströmungen spüren Reibung; ihre Struktur ( $r_0 = U/f \approx 10^3 \text{ m}$ ) ist meist zu klein, als dass sie zu den wirklich großräumigen und damit quasi-reibungsfreien Strömungsmustern gehören.

**c) Geostrophische Strömungen** Der Ozean hat endliche Ausdehnung; die Strömungen müssen die Ränder über Druckgradienten „spüren“. Geostrophische Strömungen sind stationäre Strömungen, bei denen sich Druckgradienten und Coriolisbeschleunigung die Waage halten. Weil das globale Druckfeld großräumig ist, erwartet man ähnliche räumliche Strukturen für das entsprechende Strömungsfeld. Das bedeutet konkret, dass nichtlineare Terme und turbulente Reibung vernachlässigt werden dürfen. Aus Gl. 3.44 folgt für stationäre ( $\partial v_i / \partial t = 0$ ) Strömungen ohne Reibung:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu \end{aligned} \quad (3.58)$$

bzw. für die geostrophischen Geschwindigkeiten  $u_g, v_g$

$$u_g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{und} \quad v_g = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.59)$$

*Bemerkung:* Die vertikalen Druckgradienten werden in der hydrostatischen Näherung durch die Erdbeschleunigung kompensiert!

Nach Gl. 3.59 laufen die geostrophischen Strömungen rechtwinklig zum horizontalen Druckgradienten

$$\nabla_h p \equiv \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (3.60)$$

d.h. entlang von Bahnen konstanten Druckes und zwar so, dass auf der N-Hemisphäre der größere Druck zur rechten der Strömung ist. Da auf der S-Hemisphäre  $f < 0$  gilt, ist dort die Strömungsrichtung umgekehrt (größerer Druck zur linken). Formal kann man dies auch durch das Vektorprodukt

$$\mathbf{v}_g = \frac{1}{\rho f} (\hat{\mathbf{z}} \times \nabla_h p) \quad (3.61)$$

ausdrücken, wo  $\hat{\mathbf{z}} = (0, 0, 1)$  der Einheitsvektor in z-Richtung ist.

Wiederholen wir nun die für Inertialströmungen gemachten Abschätzungen bezüglich der Berechtigung, Terme wegzulassen, so sieht die Situation wie folgt aus:  $L \approx 10^3$  km sei eine typische horizontale Größe für die Struktur geostrophischer Strömungen. Aus der Kontinuitätsgleichung 3.10 schätzen wir zuerst die typische vertikale Geschwindigkeit  $W$  ab:

$$\frac{W}{H} \approx \frac{\partial w}{\partial z} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \approx \frac{U}{L} \quad (3.62)$$

d.h.  $W \approx UH/L$ , wobei  $H$  die typische Tiefenskala ist. Mit  $H \approx 10^3$  m folgt  $W \approx 10^{-3}U$ . Es ist somit berechtigt, bei der Analyse großräumiger Strömungen die vertikale Komponente in den Bewegungsgleichungen zu vernachlässigen.

Die Reibungsterme können analog zu Gl. 3.56 durch  $A_h U/L^2$  bzw.  $A_z U/H^2$  abgeschätzt werden. Natürlich sind diese nun wesentlich kleiner als im Falle der Trägheitsströmungen, da  $r_0$  durch das rund  $10^3$ -mal größere  $L$  ersetzt wird. Konkret: Das Verhältnis

$$\frac{\text{Horizontale Reibung}}{\text{Coriolisterm}} \approx \frac{A_h U}{L^2} \frac{1}{fU} = \frac{A_h}{fL^2} \quad (3.63)$$

sollte klein sein gegenüber 1, damit die Reibung vernachlässigt werden kann. Dieses Verhältnis wird durch die *horizontale Ekman Zahl*  $E_h$  beschrieben, welche üblicherweise wie folgt definiert ist:

$$E_h \equiv \frac{2A_h}{fL^2} \quad (3.64a)$$

Entsprechend ist die *vertikale Ekman Zahl*  $E_z$ :

$$E_h \equiv \frac{2A_z}{fH^2} \quad (3.64b)$$

ein Maß für das Verhältnis zwischen vertikaler Reibung und Coriolisterm. Nehmen wir die oberen Grenzen für  $A_h$  und  $A_z$  nach Gl. 3.54 ( $A_h = 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ,  $A_z = 0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ), ergibt sich mit  $L = 10^6 \text{ m}$ ,  $H = 10^3 \text{ m}$ :

$$E_h \approx 2 \cdot 10^{-3}, \quad E_z \approx 2 \cdot 10^{-3} \quad (3.65)$$

Schließlich betrachten wir den Vergleich zwischen nichtlinearem Term (s. Gl. 3.57) und Coriolisterm: Das Verhältnis

$$\frac{\text{Nichtlinearer Term}}{\text{Coriolisterm}} \approx \frac{U^2}{L} \frac{1}{fU} = \frac{U}{fL} \equiv Ro \quad (3.66)$$

heißt *Rossby Zahl*.

Mit  $U = 10^{-1} \text{ m s}^{-1}$ ,  $f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $L = 10^6 \text{ m}$  folgt  $Ro = 10^{-3}$ . Übrigens ist die Rossby Zahl für die Trägheitsströmung gerade 1, was man leicht aus Gl. 3.66 entnimmt, wenn man dort  $L$  durch  $r_0 = U/f$  ersetzt.

### 3.5 Barotrope und barokline Druckgradienten

Druckgradienten führen zu Strömungen, Strömungen zu Druckgradienten. Die beiden Aspekte gehören zusammen wie Huhn und Ei. Da es sehr schwierig und aufwendig ist, im Meer Strömungen zu messen, vor allem wenn man daran denkt, dass ein 3-dimensionales Messnetz mit zumindest 2-dimensionalen Daten (horizontale Komponenten) zur Verfügung stehen müsste, um etwas über das globale Strömungsfeld aussagen zu können. Daher liegt es nahe, Strömungen indirekt aus den Druckgradienten zu bestimmen. Wie manifestieren sich Druckgradienten? Es gibt zwei Beiträge, der *barotrope* und der *barokline* Beitrag.

**Barotroper Druckgradient:** Die Dichte  $\rho$  im Inneren der Wassersäule ist konstant (oder zumindest sind die Linien gleicher Dichte (Isopyknen) und gleichen Druckes (Isobaren) parallel, d.h. sie schneiden sich nicht). Dann kommen horizontale Druckgradienten nur durch eine Neigung der Wasseroberfläche zustande (Abb. 3.5):

$$p(x, y, z) = g \int_z^{h(x,y)} \rho dz' \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g\rho \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = g\rho \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.68)$$

Beachte: Druckgradienten sind unabhängig von der Tiefe  $z$ .

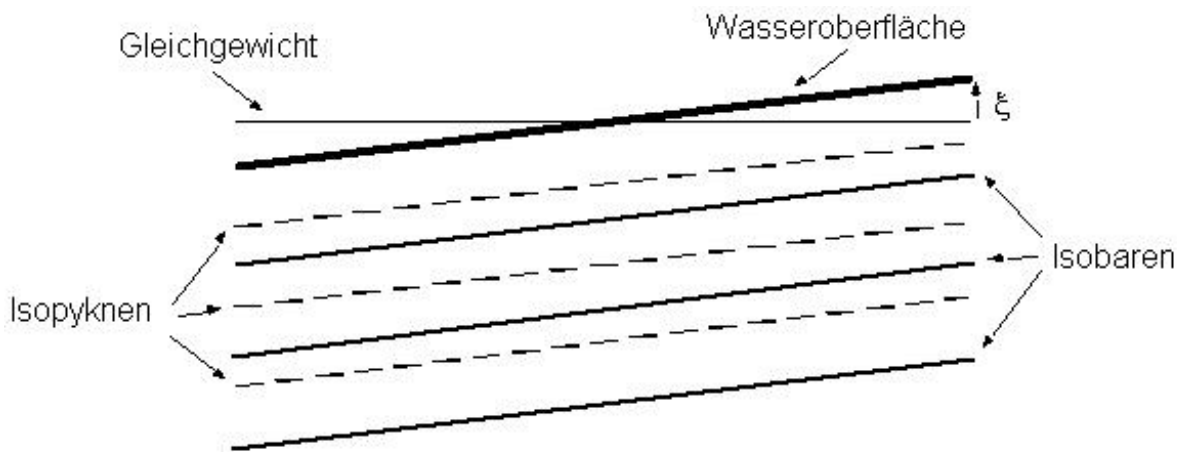


Abb. 3.5: Barotroper Druckgradient: Isobaren und Isopyknen sind parallel.

Aus der Annahme von geostrophischem Gleichgewicht folgt mit Gl. 3.59:

$$u_g = -\frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.69)$$

*Beispiele:*

1. Durch Windeinfluss wird in einem  $L = 50$  km langen See der Wasserspiegel an einem Ende um 20 cm gehoben, am andern um 20 cm gesenkt. Dann sind Druckgradient und Beschleunigung ( $\Delta h = 0.4$  m):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{g\rho\Delta h}{L} = 7.85 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-2} \quad (\text{N m}^{-3})$$

2. Die Ozeanoberfläche falle entlang des 25°N-Breitenkreises von E nach W über eine Distanz von 1000 km um 1 m. Wie groß ist die dazu gehörende geostrophische Strömung in einem barotropen Ozean?

Es ist  $\partial h/\partial x = 10^{-6}$ ,  $\partial h/\partial y = 0$ . Nach Gl. 3.68 folgt  $\partial p/\partial x \approx 10^{-2} \text{ N m}^{-3}$ ,  $\partial p/\partial y = 0$ . Aus 3.69 mit  $f = 6.2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  folgt:  $u_g = 0$ ,  $v_g = 0.16 \text{ m s}^{-1}$  (Strömung nach Norden).

Tatsächlich ist es erst heute überhaupt möglich, die Höhe der Wasseroberfläche mittels Satelliten so genau zu bestimmen, dass daraus barotrope Strömungen berechnet werden können. Ferner erweisen sich die barotropen Druckgradienten im Vergleich zu den baroklinen oft als weniger wichtig für das Strömungsfeld.

**Barokliner Druckgradient:** Es bestehen horizontale Dichtegradienten im Innern der Wasserkolonne, wodurch Druckgradienten erzeugt werden. Die Situation wird durch sich schneidende Isopyknen bzw. Isobaren charakterisiert (Abb. 3.6).

Wir betrachten zwei hydrographische Profile  $A$  und  $B$ , welche auf einem Breitenkreis im Abstand  $L$  gemessen und aus denen zwei Dichteprofile,  $A(z)$  und  $B(z)$ ,

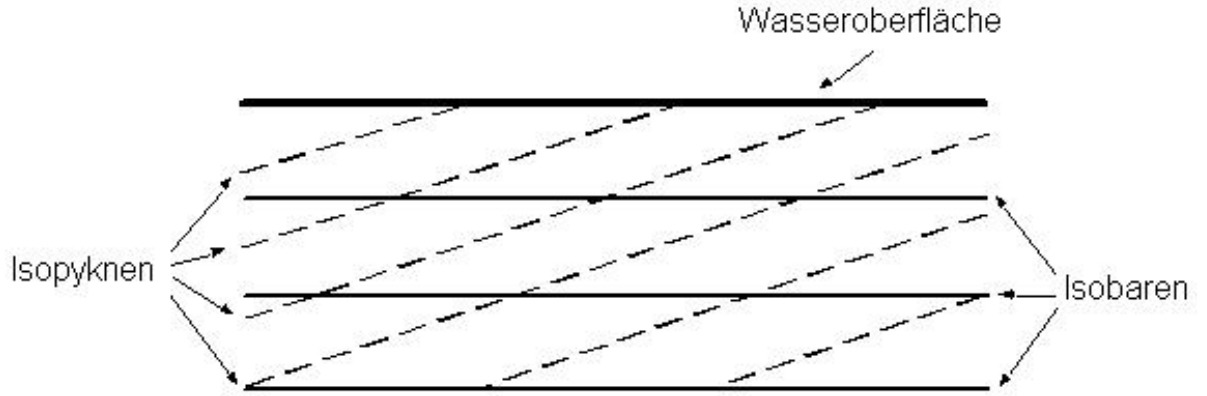


Abb. 3.6: Barokliner Druckgradient: Isobaren und Isopyknen schneiden sich.

berechnet wurden. Station  $B$  liege östlich von Station  $A$ . Ferner wird angenommen, es existiere eine Tiefe  $z^*$ , in der die Isobaren horizontal liegen, wo also die geostrophische Strömungsgeschwindigkeit null ist. Der Druck in der Tiefe  $z > z^*$  an der Station  $i (= A, B)$  ist:

$$p_i(z) = p_i(z^*) - g \int_{z^*}^z \rho_i(z') dz' \quad (3.70)$$

Falls wie oben angenommen  $p_A(z^*) = p_B(z^*)$ , folgt für die Druckdifferenz zwischen den beiden Stationen in der Tiefe  $z$ :

$$\Delta p(z) = p_B(z) - p_A(z) = -g \int_{z^*}^z [\rho_B(z') - \rho_A(z')] dz' \quad (3.71)$$

Mit der Annahme  $\partial p / \partial x \approx \Delta p / L$  kann man somit die geostrophische Strömungsgeschwindigkeit in N/S-Richtung berechnen zu (siehe Abb. 3.7):

$$v_g = - \frac{g}{\rho f L} \int_{z^*}^z [\rho_B(z') - \rho_A(z')] dz' \quad (3.72)$$

Falls der horizontale Druckgradient in der Tiefe  $z^*$  nicht null wäre, könnte wenigstens der relative vertikale Verlauf von  $v_g$  berechnet werden:

$$\left. \frac{\partial v_g}{\partial z} \right|_z = - \frac{g}{\rho f L} \Delta \rho(z) \quad \text{mit} \quad \Delta \rho(z) = \rho_B(z) - \rho_A(z) \quad (3.73)$$

Bei der Integration von 3.73 von  $z = z^*$  nach oben käme dann (Fall II in Abb. 3.7b) einfach noch die unbekannte geostrophische Geschwindigkeit an der Basis

$$v_g(z^*) = \frac{1}{\rho f} \frac{\Delta p(z^*)}{L} \quad (3.74)$$

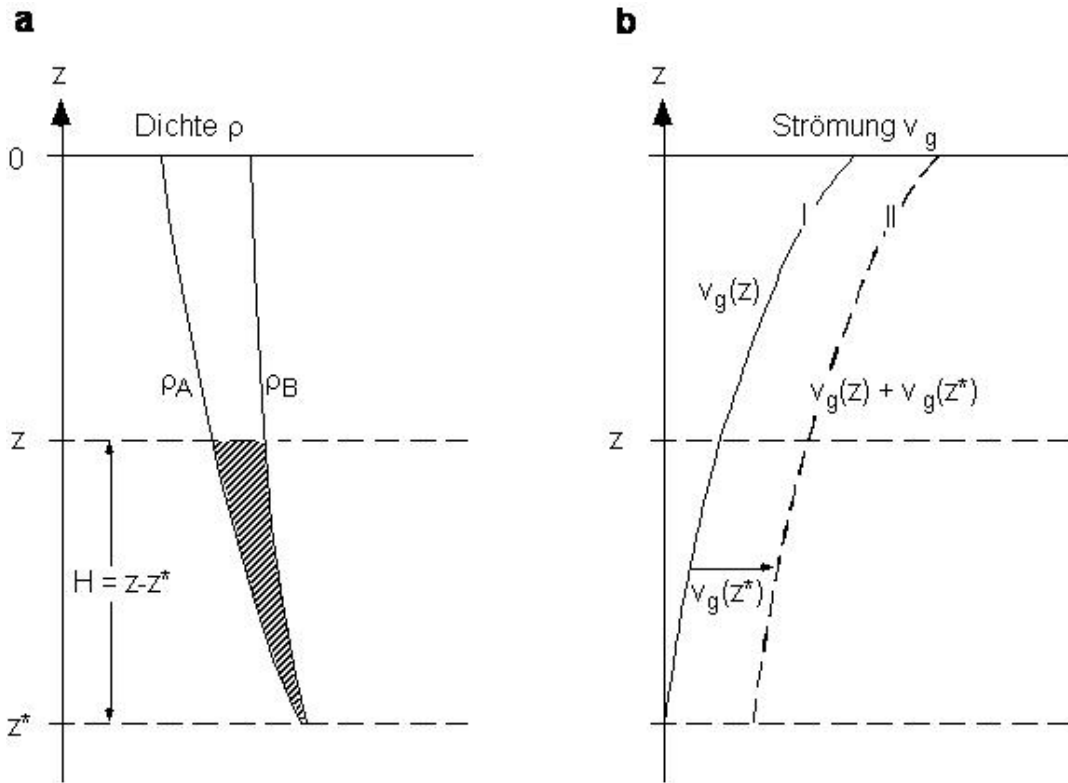


Abb. 3.7: Berechnung der vertikalen Struktur der horizontalen Strömung aus dem baroklinen Druckgradienten mit Hilfe der verallgemeinerten Formel von Helland-Hansen (Gl. 3.71). Die schraffierte Fläche in Bild **a** ist ein Maß für die Strömung in der Tiefe  $z$  unter der Annahme, dass Druckgradient und Strömung in der Tiefe  $z^*$  null sind. Die ausgezogene Kurve in **b** zeigt die geostrophische Geschwindigkeit  $v_g$  als Funktion der Tiefe. Ist die Annahme  $v_g(z^*) = 0$  nicht richtig, so erhöht sich  $v_g(z)$  in allen Tiefen um  $v_g(z^*)$ .

dazu. D. h., Gl. 3.72 müsste um einen Term erweitert werden:

$$v_g = -\frac{g}{\rho f L} \int_{z^*}^z [\rho_B(z') - \rho_A(z')] dz' + \frac{1}{\rho f} \frac{\Delta p(z^*)}{L} \quad (3.75)$$

*Spezialfall:*

$\rho_A$  und  $\rho_B$  sind innerhalb der beiden Profile je konstant. Dann folgt aus Gl. 3.72

$$v_g = -\frac{g}{\rho f L} (\rho_B - \rho_A)(z - z^*) \approx -\frac{g}{f L} \left(1 - \frac{\rho_A}{\rho_B}\right) H \quad (3.76)$$

$H = z - z^*$  ist die Distanz zwischen Messtiefe  $z$  und Referenztiefe  $z^*$ . (Beachte:  $z < 0$  für Punkte unterhalb der Wasseroberfläche!). Gleichung 3.76 wurde von Helland-Hansen und Sandstrøm im Jahre 1903 für die indirekte Berechnung von horizontalen Strömungsgeschwindigkeiten eingeführt.