

2 Dichte des Wassers

Die Dichte ($\rho = m/V$, Dimension $M L^{-3}$) von Wasser ist nicht nur druck- und temperaturabhängig (wie diejenige aller Substanzen), sondern hängt auch von der exakten chemischen und physikalischen Zusammensetzung des Wassers ab. Auch für destilliertes Wasser muss man im Prinzip die genaue Isotopenzusammensetzung (insbesondere die Häufigkeit von 2H (Deuterium) und ^{18}O) kennen und wissen, ob das Wasser gasfrei ist. In der Praxis beschränkt man sich aber meist auf eine Beschreibung der Dichte als Funktion von Temperatur, Salzgehalt und Druck. Die Funktion $\rho(T, S, p)$ ist von grundlegender Bedeutung für die Physik aquatischer Systeme und wird als Zustandsgleichung des Wassers bezeichnet. Eine gute Übersicht zur Bestimmung der Zustandsgleichung findet man in F.J. Millero, A. Gonzales und G.K. Ward, [5]. Für Seen relevant ist auch die Arbeit von C.T.A. Chen und F.J. Millero "Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range", [6] (s. Anhang A.1).

2.1 Dichte von reinem Wasser

Tab. 2.1 gibt eine Übersicht zu Dichte und thermischem Ausdehnungskoeffizienten α von Wasser als Funktion der Temperatur. Die größte Dichte besitzt Wasser bei einer Temperatur von $3.98^\circ C$ ($\rho = 999.972 \text{ kg m}^{-3}$). Der thermische Ausdehnungskoeffizient α ist definiert durch:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad [K^{-1}] \quad (2.1)$$

α bezeichnet demnach die relative Dichteänderung ($\Delta\rho/\rho$) des Wassers pro Temperaturänderung (ΔT). Das negative Vorzeichen kommt daher, dass α die relative Ausdehnung beschreiben soll, eine Zunahme der Dichte aber einer Kontraktion entspricht. Man kann α anstatt durch die Dichte $\rho = m/V$ auch durch das spezifische Volumen $v = \rho^{-1}$ ausdrücken, dann wird das Vorzeichen positiv:

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad [K^{-1}] \quad (2.2)$$

Da ρ oberhalb $T_{\rho max} = 3.98^\circ C$ mit T abnimmt (v zunimmt), ist α dort positiv, für $T < T_{\rho max}$ negativ und bei der Temperatur maximaler Dichte ($T_{\rho max}$) null. α und $T_{\rho max}$ sind druckabhängig (siehe Tab. 2.1).

Tab. 2.1: Dichte und thermische Ausdehnung von Wasser in Abhängigkeit von Temperatur und Druck ^a, berechnet nach Chen und Millero ([6])

T [°C]	Dichte $\rho(T)$ ^b [kg m ⁻³]		Thermischer Ausdehnungs koeffizient $\alpha(T, p)$ [10 ⁶ K ⁻¹]			
	p ^a = 0	p = 0	p = 20	p = 50	p = 100	p = 180
0	999.839	-68.00	-60.64	-49.59	-31.18	-1.72
1	999.898	-50.09	-43.03	-32.43	-14.78	13.48
2	999.940	-32.77	-26.00	-15.85	1.08	28.17
3	999.964	-16.01	-9.53	0.20	16.42	42.37
4	999.972	0.22	6.43	15.75	31.27	56.11
5	999.964	15.96	21.90	30.81	45.66	69.42
10	999.700	87.99	92.70	99.76	111.52	130.35
15	999.100	150.89	154.55	160.05	169.21	183.86
20	998.204	206.76	209.59	213.79	220.82	232.07
25	997.045	257.17	259.33	262.55	267.93	276.54
30	995.671	303.00				
40	992.238	385.00				
50	988.052	423.00				
60	983.200	523.00				
80	971.800	641.00				
100	958.360	750.00				

Den Verlauf von $\rho(T)$ für reines Wasser bei einem Druck von 1013 mbar (1 atm) kann man durch eine einfache parabolische Gleichung approximieren:

$$\rho(T) \approx 999.972 - 7 \cdot 10^{-3}(T - 4)^2 \quad (T \text{ in } [^{\circ}\text{C}]) \quad [\text{kg m}^{-3}] \quad (2.3)$$

oder, falls es nur auf relative Dichteänderungen ankommt, noch einfacher durch

$$\rho(T) = 1000 - 7 \cdot 10^{-3}(T - 4)^2 \quad [\text{kg m}^{-3}]. \quad (2.4)$$

Für die einfache Approximation, Gl. 2.3 oder (2.4), wird α zur linearen Funktion

$$\alpha(T) \approx 14 \cdot 10^{-6}(T - 4) \quad [\text{K}^{-1}] \quad (2.5)$$

In Abb. 2.1 werden die Näherungsformeln von $\rho(T)$ und $\alpha(T)$ mit dem exakten Verlauf verglichen.

^aDer hydrostatische Druck p [bar] ist an der Wasseroberfläche null.

^bDichte bei einem Luftdruck von 1013 mbar.

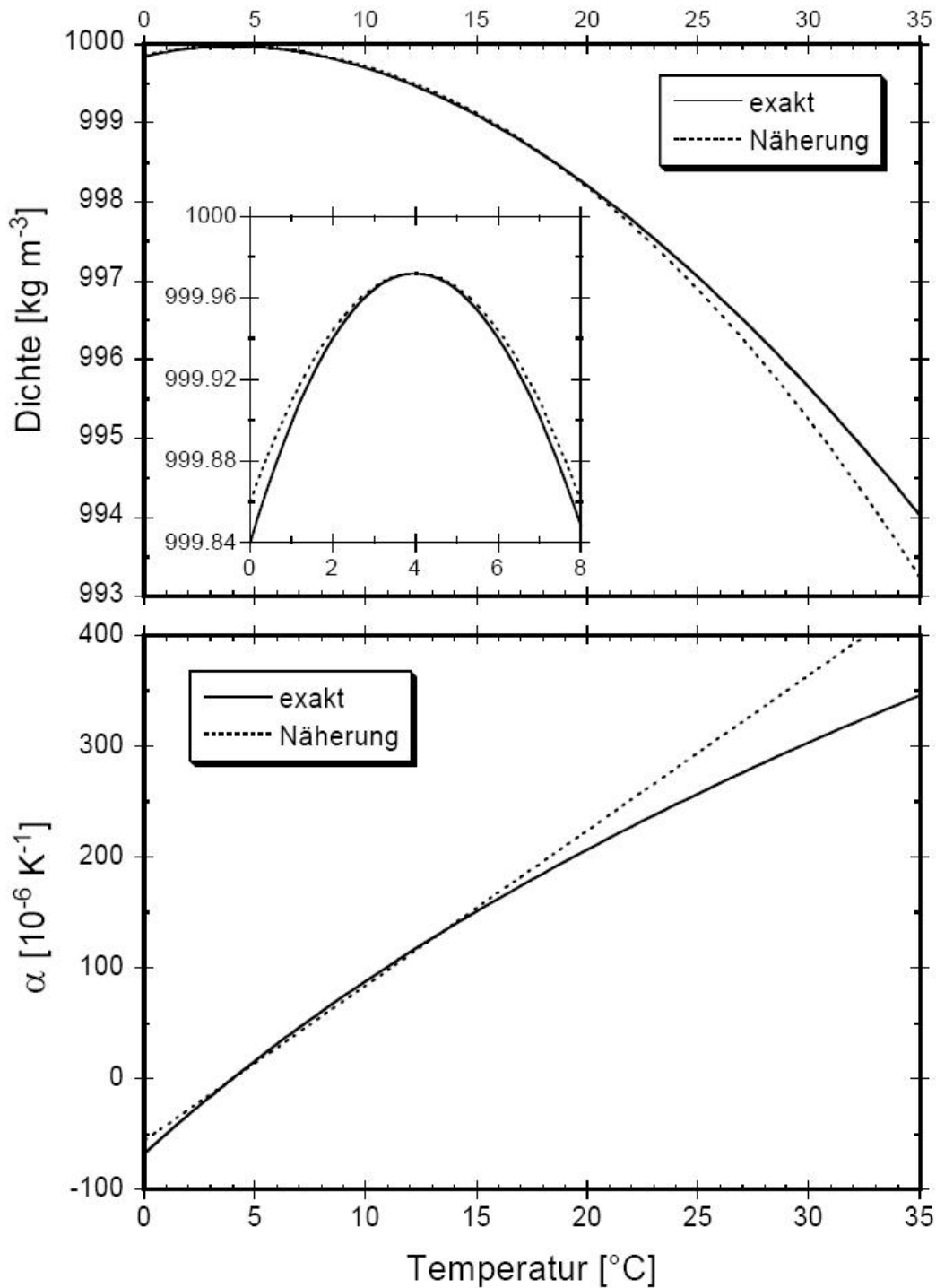


Abb. 2.1: Dichte ρ und thermischer Ausdehnungskoeffizient α von Wasser: Vergleich der exakten Werte mit den Näherungen (2.3) und (2.5).

Kompressibilität Der Kompressibilitätsmodul K_m (englisch: *tangent bulk modulus*) ist das Inverse der isothermen Kompressibilität γ

$$K_m^{-1} = \gamma = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T \quad [\text{bar}^{-1}] \text{ oder } [\text{Pa}^{-1}] \quad (2.6)$$

Nach Chen and Millero [6] wird K_m durch das folgende Polynom beschrieben:

$$\begin{aligned}
 K_m[\text{bar}] = & 19652.17 + 148.113 T - 2.293 T^2 + 1.256 \cdot 10^{-2} T^{-3} - 4.18 \cdot 10^{-5} T^4 \\
 & + (3.2726 - 2.147 \cdot 10^{-4} T + 1.128 \cdot 10^{-4} T^2)p \\
 & + (53.238 - 0.313 T + 5.728 \cdot 10^{-3} p) S
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

T in [°C], S in [‰], p in [bar].

Werte von γ sind in Tab. 2.2 zusammengestellt.

Tab. 2.2: Isotherme Kompressibilität γ in [10^{-6} bar $^{-1}$] für reines Wasser als Funktion von T und p (nach Chen und Millero, [6])

p [bar]	T [°C]						
	0	5	10	15	20	25	30
0	50.89	49.17	47.81	46.73	45.89	45.25	44.77
10	50.47	49.04	47.68	46.61	45.77	45.13	44.65
20	50.60	48.90	47.55	46.49	45.66	45.02	44.54
30	50.45	48.77	47.43	46.37	45.54	44.90	44.42
40	50.31	48.63	47.30	46.25	45.42	44.79	44.31
50	50.17	48.50	47.18	46.13	45.31	44.67	44.19
60	50.03	48.37	47.05	46.01	45.19	44.56	44.08
80	49.74	48.10	46.80	45.77	44.96	44.33	43.85
100	49.46	47.84	46.55	45.54	44.73	44.11	43.63
140	48.90	47.32	46.07	45.07	44.28	43.66	43.18
180	48.35	46.81	45.58	44.61	43.84	43.22	42.74

Druckeinheiten: 1 Pascal (Pa) = 1 N m $^{-2}$
 1 bar = 10 6 dyn cm $^{-2}$ = 10 5 Pa
 1 atm = 1.013 · 10 5 Pa = 760 Torr (Atmosphären-Normaldruck)

Eine Säule von einem Meter reinem Wasser ($\rho_0 \cong 1000$ kg m $^{-3}$) entspricht einer Druckdifferenz von

$$\Delta p = 9.81 \cdot 10^3 \text{ Pa} = 0.0981 \text{ bar} = 0.0967 \text{ atm} .$$

2.2 Gelöste Substanzen, Dichte und elektrische Leitfähigkeit

2.2.1 Dichte als Funktion des Salzgehaltes

Gelöste Salze und Gase verursachen eine Dichteänderung des Wassers, welche man in erster Näherung durch eine lineare Beziehung der Form

$$\rho(T, C) = \rho(T) (1 + \beta_C C) \tag{2.8}$$

darstellen kann. β_C ist der spezifische *Kontraktionskoeffizient* von Wasser bezüglich der Stoffkonzentration C (man beachte die Bedeutung der Vorzeichenkonvention im Vergleich zum thermischen *Ausdehnungskoeffizienten* α):

$$\beta_C = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{T,p} \quad [\text{M}^{-1} \text{L}^3] \quad (2.9)$$

Normalerweise enthält Wasser ein komplexes Gemisch an Stoffen. Die Verallgemeinerung von (2.8) lautet:

$$\rho(T, C_i) = \rho(T) (1 + \Sigma \beta_i C_i) \quad (2.10)$$

$$\beta_i = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C_i} \right)_{T,p,C_{j \neq i}} \quad [\text{M}^{-1} \text{L}^3] \quad (2.11)$$

Einige β_i -Werte sind in Tab. 2.3 zusammengestellt. Lösung von Salzen führt zu einer Dichtezunahme (positive β_i für Ionen). β_i kann aber auch negativ sein (z.B. für gelöste Gase), das bedeutet eine Dichteabnahme mit zunehmender Konzentration. Man beachte, dass Schwebstoffe (unter der Annahme, sie hätten eine feste Dichte) bezüglich ihres Einflusses auf ρ wie gelöste Stoffe behandelt werden können.

Ob ein gelöster Stoff die Dichte des Wassers erhöht oder erniedrigt, hängt in erster Näherung von seinem molaren Masse/Volumen-Verhältnis im Vergleich zu demjenigen des Wassers ab. Allerdings spielen auch die Konzentrationen aller gelösten Stoffe, die Temperatur und der Druck eine Rolle. Auf die Berechnung der β_i gehen wir hier nicht näher ein.

Normalerweise dominieren die Salze unter den gelösten Stoffen. Da sich die Konzentrationen gelöster Salzionen außerdem relativ bequem über die elektrische Leitfähigkeit messen lässt (s. unten), wird gewöhnlich der Einfluss nicht-ionaler Stoffe auf die Dichte vernachlässigt. Dies ist meist gerechtfertigt. Auch der Einfluss des Salzgehaltes auf die Dichte kann bei Süßwasser manchmal im Vergleich zum Temperatureffekt vernachlässigt werden. Jedoch können gelöste Salze bei Temperaturen in der Nahe von $T_{\rho max}$ (wo α ungefähr null ist) sowie bei hohem Salzgehalt auch eine völlig dominante Rolle für die Dichte spielen.

Da die Messung sämtlicher chemischer Konzentrationen C_i sehr aufwändig ist, wäre es vorteilhaft, einen chemischen Summenparameter zu benutzen. Für Meerwasser ist dies die (via Leitfähigkeit oder Chlorinität bestimmbare) Salinität S . Die Salinität wird heute in der Ozeanographie durch eine dimensionslose Zahl definiert:

$$S = \frac{\text{Masse aller Salze [in kg] im Salzwasservolumen } V}{\text{Totale Masse des Salzwassers [in kg] in } V} \quad (2.12)$$

Dies ist äquivalent zur alten Definition von S als die Masse aller Salze [in g] in einem kg Meerwasser, für die früher die Einheit [g/kg] oder auch [‰] benutzt worden ist. Da die relative chemische Zusammensetzung des Meerwassers außerordentlich konstant ist, kann man ρ direkt aus S (oder auch aus der elektrischen Leitfähigkeit) berechnen, gemäß folgender Formel (s. Anhang A.2 für genauere Berechnung):

$$\rho(T, S) = \rho(T) (1 + \beta_S S) \quad (2.13)$$

Tab. 2.3: Einfluss gelöster Stoffe und suspendierter Partikel auf die Dichte von Wasser (β_i nach Gl. 2.11 bzw. 2.13, für $T = 25^\circ\text{C}$)

Substanz	β_i [$10^{-6} \text{ l mg}^{-1}$]
NaCl	0.719
Na ₂ (SO ₄)	0.922
Ca(HCO ₃) ₂	0.813
Mg(HCO ₃) ₂	0.815
Na(HCO ₃)	0.728
K(HCO ₃)	0.669
Fe(HCO ₃) ₂	0.838
NH ₄ (HCO ₃)	0.462
CO ₂	0.273
CH ₄	-1.250
Luft	-0.090
Schwebstoffe mit $\rho_S = 2.5 \text{ g cm}^{-3}$	0.600
mit $\rho_S = 1.1 \text{ g cm}^{-3}$	0.090

$$\text{Salinität des Meeres (S)} \quad (\beta_S) \quad 0.761 \cdot 10^{-3} \text{ ‰}^{-1}$$

$\beta_S = \rho^{-1} \partial \rho / \partial S$ ergibt sich aus den Beiträgen der einzelnen im Meer gelösten Elektrolyten (vor allem Cl^- , Na^+ , Mg^{++} und SO_4^{--}) zur Dichte (vgl. Tab. 2.3). Für Süßwasser existiert keine feste chemische Zusammensetzung, welche ein analoges Vorgehen ermöglichte. Auch der Begriff Salinität ist in Süßwasserstudien eher unüblich, obwohl natürlich die Definition (2.12) ohne weiteres übertragbar ist (stattdessen wird z.B. TDS = Total Dissolved Solids verwendet). Wir werden im Folgenden die Salinität gemäß (2.12) auch für Wasser mit anderer Ionenzusammensetzung als Meerwasser verwenden.

Zur Bestimmung von S und β_S muss im Prinzip für jedes Gewässer die genaue Ionenzusammensetzung bestimmt werden. In vielen Gewässern dominieren aber wenige Ionen (oft Ca^{++} und HCO_3^-), so dass einfache Approximationen möglich werden (z. B. $\beta_S = 0.8 \cdot 10^{-6} \text{ l mg}^{-1}$, vgl. Tab. 2.3). Meist wird jedoch anstelle der Ionenkonzentrationen die elektrische Leitfähigkeit κ bestimmt. Daher ist es sinnvoll, eine direkte Beziehung zwischen Leitfähigkeit und Dichte herzustellen.

2.2.2 Salzgehalt und Leitfähigkeit

Zunächst betrachten wir den Zusammenhang zwischen elektrischer Leitfähigkeit und Ionenkonzentrationen. Da beim Lösen von Salzen in Wasser geladene Ionen frei werden, erhöht sich die elektrische Leitfähigkeit κ . Der Zusammenhang $\kappa(S)$ ist jedoch ziemlich komplex, da sich die Ionen gegenseitig beeinflussen und κ außerdem noch von der Temperatur abhängt.

Die elektrische Leitfähigkeit κ einer Lösung ist definiert durch

$$\kappa = \frac{j}{E} \quad (2.14)$$

mit E [V m^{-1}]: elektrische Feldstärke, j [A m^{-2}]: Stromdichte.

Die Einheit $\Omega^{-1} = (\text{V/A})^{-1}$ wird oft durch Siemens (S) oder - wie noch in der älteren amerikanischen Literatur - durch mhos (mho ist „Ohm“ rückwärts gelesen) angegeben. Somit hat κ die Einheit S m^{-1} , in der Literatur meist $\mu\text{S cm}^{-1}$.

Die elektrische Leitfähigkeit von Wasser wird von der Anzahl der Ionen (Ladungsträger) und deren Beweglichkeit bestimmt. Die elektrische Leitfähigkeit von reinem Wasser ist so klein, dass sie gegenüber dem Beitrag der Ionen vernachlässigt werden kann. κ hängt insbesondere ab von der:

- Viskosität des Wassers, μ (Funktion der Temperatur)
- Ladungskonzentration der einzelnen Ionen, m_i [eq/L] = C_i [mol/L] $\cdot Z_i$ [eq/mol]
- Äquivalenzleitfähigkeit der Ionen bei unendlicher Verdünnung, λ_i^∞ [$\text{S m}^{-1} (\text{eq/L})^{-1}$]

Für eine unendlich verdünnte Lösung gilt:

$$\kappa(m_1, \dots, m_N) = \sum_{i=1}^N \lambda_i^\infty \cdot m_i \quad (2.15)$$

Da die Ionen bei großer Ionenstärke (Gesamtkonzentration freier Ladungen) sich gegenseitig beeinflussen und sogar ungeladene Paare bilden, schwächt sich der Beitrag jeder Ionensorte bei großer Ionenstärke ab. Dies kann durch konzentrationsabhängige Abschwächungskoeffizienten f_i beschrieben werden. Die Leitfähigkeit nimmt also mit wachsender Konzentration C_i langsamer als linear zu, gemäß

$$\kappa(C_1, \dots, C_N) = \sum_{i=1}^N f_i(C_1, \dots, C_N) \lambda_i^\infty \cdot C_i \cdot Z_i \quad (2.16)$$

Die Äquivalenzleitfähigkeit lässt sich herleiten aus dem Gleichgewicht zwischen der beschleunigenden Kraft im E-Feld und der bremsenden Stokes'schen Reibung:

$$\lambda_i^\infty = \frac{e^2 Z_i}{6\pi\mu r_i} \quad (2.17)$$

mit

- μ : molekulare Viskosität [$\text{N m}^{-2} \text{s}$]
- r_i : Radius des Ions i [m]
- Z_i : Anzahl Elementarladungen des Ions i
- e : Elementarladung [C]

Der starke Anstieg von λ_i^∞ und damit κ mit der Temperatur ist eine Folge der Abnahme von μ mit T . Um κ als Maß der chemischen Zusammensetzung des Wassers zu benutzen, muss κ immer auf die gleiche Temperatur (meist $T = 20^\circ\text{C}$) umgerechnet werden. Diese Umrechnung hängt aber ebenfalls von der Ionenzusammensetzung ab (Anteile der Ionen mit unterschiedlicher Wertigkeit und Ionenradius). Für $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$ dominiertes Wasser kann das folgende, empirisch bestimmte Polynom in T verwendet werden [7]:

$$\kappa_{20} = \kappa_T (1.72118 - 0.0541369 T + 1.14842 \cdot 10^{-3} T^2 - 1.222651 \cdot 10^{-5} T^3) \quad (2.18)$$

mit κ_T : elektrische Leitfähigkeit bei Temperatur T [$^\circ\text{C}$].

Nun suchen wir den Zusammenhang zwischen der normierten Leitfähigkeit κ_{20} und der Salinität. Für feste relative Häufigkeit der gelösten Ionen und geringe Konzentrationsänderungen bzw. stark verdünnte Lösungen (konstante f_i) nimmt κ linear mit der Gesamtionenkonzentration zu. Dasselbe gilt für die Salinität:

$$S = \frac{1}{\rho} \sum M_i \cdot C_i \quad (2.19)$$

mit M_i : Molekulargewicht des Ions i . Folglich kann die Salinität als lineare Funktion der Leitfähigkeit angesetzt werden:

$$S = \eta \cdot \kappa_{20} \quad (2.20)$$

Für $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$ dominierte Gewässer gilt näherungsweise $\eta \approx 0.87 \cdot 10^{-3} \text{‰}(\mu\text{S}/\text{cm})^{-1}$ bzw. $\eta \approx 0.87 \text{ (mg/l)} \cdot (\mu\text{S}/\text{cm})^{-1}$.

2.2.3 Dichte als Funktion der Leitfähigkeit

In der physikalischen Limnologie ist es üblich, die Dichte direkt aus der Leitfähigkeit zu berechnen. Dazu wird ein zu Gl. (2.8) analoger Ansatz verwendet:

$$\rho(T, \kappa_{20}) = \rho(T) \cdot (1 + \beta_\kappa \cdot \kappa_{20}) \quad (2.21)$$

Analog zu (2.9) definiert man

$$\beta_\kappa = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{d\kappa_{20}} \right) \quad (\mu\text{S}/\text{cm})^{-1} \quad (2.22)$$

Offenbar gilt $\beta_\kappa = \eta\beta_S$ und für $\text{Ca}^{++}/\text{HCO}_3^-$ dominierte Seen gilt ungefähr: $\beta_\kappa = 0.705 \cdot 10^{-6} (\mu\text{S}/\text{cm})^{-1}$.

Zusammengefasst: In $\text{Ca}(\text{HCO}_3)_2$ dominierten Gewässern entspricht eine Zunahme der Leitfähigkeit um $1 \mu\text{S}/\text{cm}$ einer Zunahme des Salzgehaltes um ca. 0.87 mg/l (Gewichtspptm) bzw. einer relativen Dichtezunahme um 0.7 ppm .

In vielen Süßwasserseen oder Flüssen liegt der Salzgehalt in der Größenordnung 100 mg/l (Leitfähigkeit ca. $100 \mu\text{S}/\text{cm}$). Der Erhöhung der Dichte aufgrund der gelösten Salze

ist somit relativ gering (Größenordnung 100 ppm oder 0.1 kg m^{-3}). Die Dichte bleibt sehr nahe bei 1000 kg m^{-3} . Im Ozean beträgt die mittlere Salinität rund 35 ‰, wodurch die Dichte um ca. 2.7 ‰ erhöht wird.

Eine detaillierte und beispielhafte Diskussion der Zustandsgleichung $\rho(T, S, p)$ für ein Süßwassersystem findet sich in [8].

2.3 Grundbegriffe der physikalischen Limnologie

Die Limnologie ist die Wissenschaft, die sich mit Süßwasser und den Binnengewässern beschäftigt. Der Begriff Limnologie stammt vom griechischen „limne“, was „stehendes Gewässer“ oder See heißt. Die moderne Limnologie erforscht die Struktur und Funktion der Binnengewässer als Ökosystem. Sie ist überwiegend biologisch ausgerichtet, aber Kenntnisse der physikalischen und chemischen Zusammenhänge bilden ebenfalls Grundvoraussetzungen zum Verständnis der Prozesse in Gewässern. Die physikalische Limnologie oder „Limnophysik“ beschäftigt sich mit der physikalischen Struktur und den physikalischen Prozessen in Binnengewässern, und ist somit einer der Pfeiler der aquatischen Physik. Ein Klassiker der physikalischen Limnologie ist die Beschreibung der Dichteschichtung in Seen und ihrer jahreszeitlichen Dynamik (Abb. 2.2). Grundlage für das Verständnis von Abb. 2.2 ist die einzigartige Abhängigkeit der Dichte des Wassers von der Temperatur. Der See gewinnt oder verliert Wärme in erster Linie an seiner Oberfläche. Wenn sich im Verlaufe des Jahres an der Oberfläche eine Wassertemperatur von 4°C einstellt, sinkt dieses Wasser maximaler Dichte in die Tiefe ab. Dort sammelt sich somit ein Tiefenwasserkörper mit nahezu homogener Temperatur und maximaler Dichte.

Im *Sommer* entsteht an der Seeoberfläche infolge des Temperaturanstiegs leichteres Wasser, das heißt eine sogenannte stabile Schichtung. Sie verlangsamt das Vordringen des warmen Wassers in größere Tiefen. Im Herbst und Winter kühlt sich das Oberflächenwasser ab und sinkt, wodurch Konvektion entsteht und die Tiefe der durchmischten Oberflächenschicht anwächst. In vielen Seen kühlt das Wasser solange ab, bis im ganzen See eine Temperatur von ungefähr 4°C herrscht. Zu diesem Zeitpunkt besteht keine starke Dichteschichtung mehr und eine vollständige vertikale konvektive Mischung (Zirkulation) kann stattfinden.

Kühlt sich im *Winter* das Oberflächenwasser noch weiter ab, schwimmt dieses kältere Wasser (und Eis) wieder auf dem 4°C -grädigen Wasser auf. Man spricht von einer inversen Schichtung. Da diese wiederum die vertikale Mischung unterdrückt, geht von da an eine weitere Abkühlung des Sees fast nur noch auf Kosten des Oberflächenwassers. Deshalb kann ein See, wenn er einmal den Zustand der inversen Schichtung erreicht hat, sehr rasch zufrieren. Im Frühjahr stellt sich erneut ein Zustand gleicher Temperatur in allen Tiefen (Homothermie) bei ca. 4°C ein. Danach bildet sich wieder die sommerliche thermische Stratifikation.

Die horizontale Temperaturschichtung des Sees unterteilt den See in Zonen verschiedener physikalischer Eigenschaften. Als *Sprungschicht* oder *Thermokline* wird jene Zone bezeichnet, in der im Sommer die Wassertemperatur mit zunehmender Tiefe stark ab-

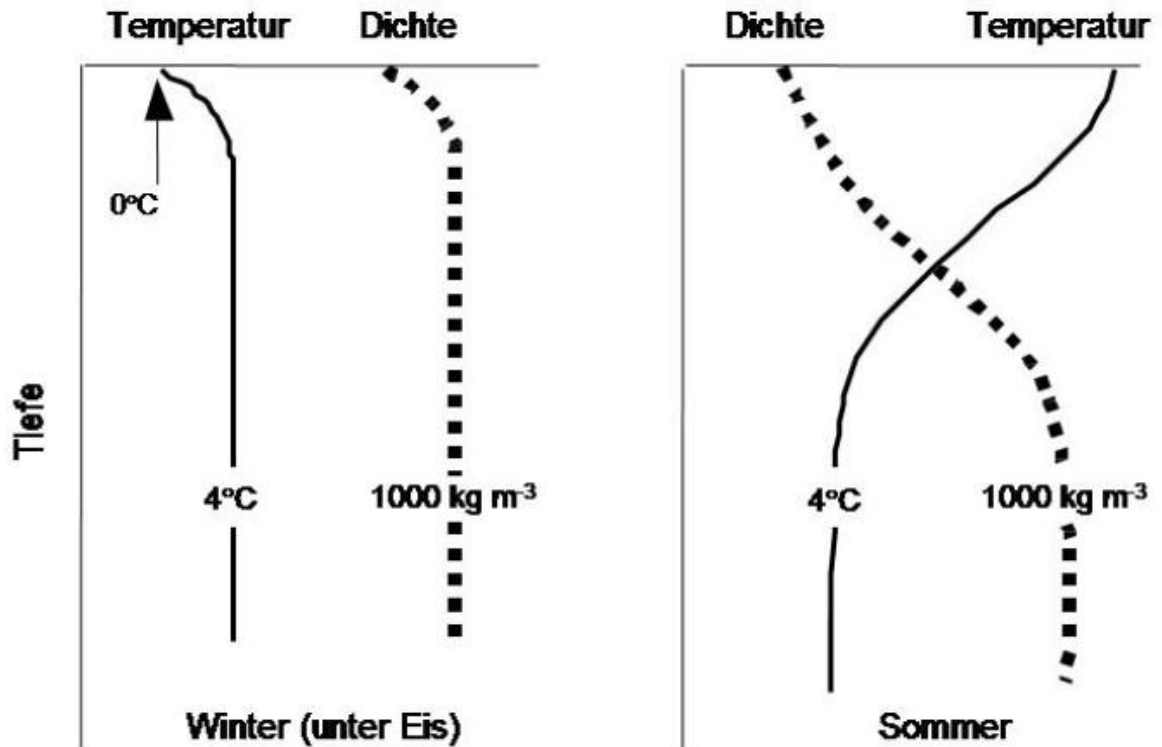


Abb. 2.2: Dichteschichtung in Seen im Jahresverlauf. Die außergewöhnlichen physikalischen Eigenschaften des Wassers (Dichtemaximum bei 4°C) sind für die vertikale Temperaturverteilung im See verantwortlich: Das Tiefenwasser verharrt während des ganzen Jahres im Zustand maximaler Dichte. Sowohl das kältere Wasser im Winter als auch das wärmere Wasser im Sommer schwimmt auf dem Tiefenwasser (stabile Schichtung). Eine bis an den Seegrund reichende intensive Durchmischung des Sees ist nur im Frühling oder Spätherbst möglich, kommt aber nicht in allen Seen jedes Jahr vor.

fällt. Die darüberliegende, gut durchmischte Zone des Oberflächenwassers heißt *Epilimnion*, die darunterliegende Zone des Tiefenwassers heißt *Hypolimnion*. Ein See, der jedes Jahr eine Phase der vollständigen vertikalen Mischung (bei ca. 4 °C) durchläuft, heißt *holomiktisch* (falls es zwei solche Phasen im Herbst und Frühjahr gibt, auch *dimiktisch*). Seen, deren vertikale Schichtung nie vollständig aufgehoben wird heißen *meromiktisch*. Dies ist insbesondere dann möglich, wenn das Tiefenwasser durch einen erhöhten Salzgehalt stabilisiert wird.

Die Abbildungen 2.3 und 2.4 zeigen zur Illustration Temperaturprofile aus verschiedenen Teilen des Vierwaldstättersees.

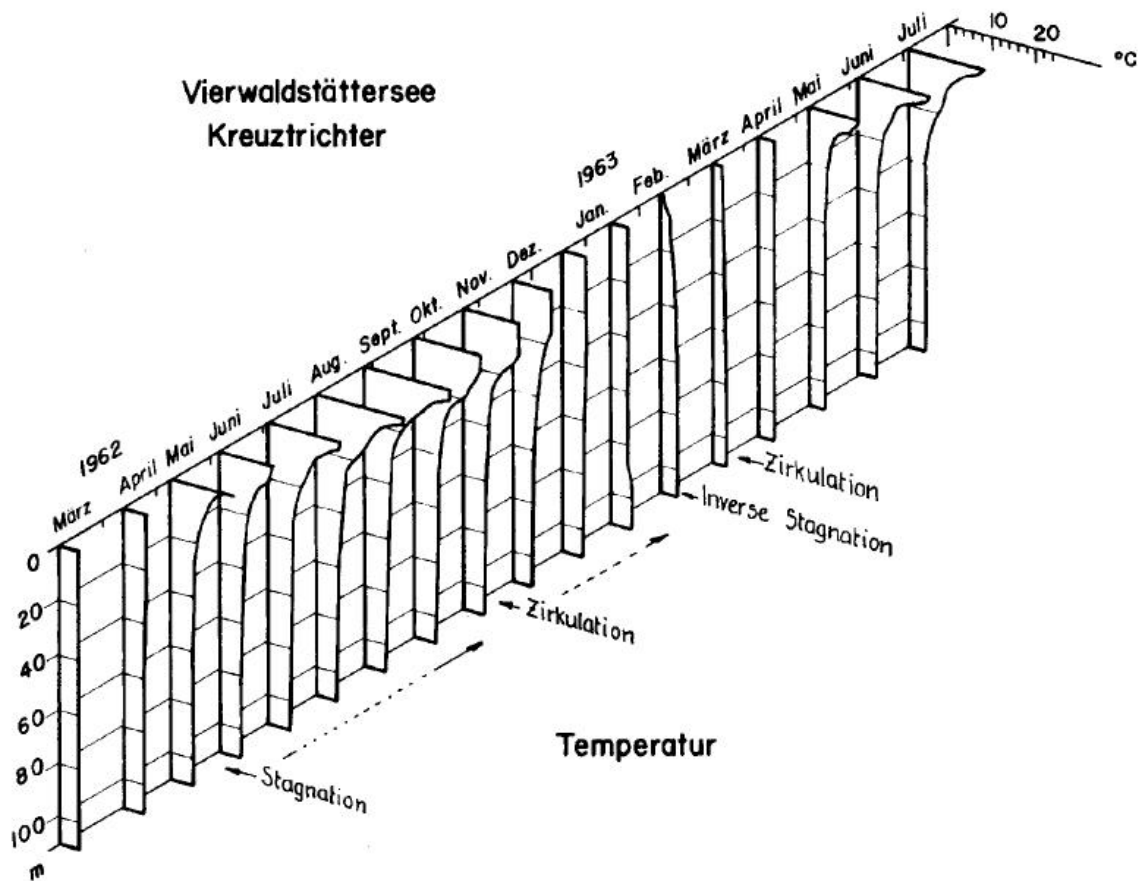


Abb. 2.3: Die vertikale Temperaturverteilung im Vierwaldstättersee im Wandel der Jahreszeiten (Prof. H. Ambühl, EAWAG)

2.4 Dichteanomalie als Funktion von Salzgehalt und Druck

Wie wir gesehen haben spielt die Dichteanomalie, d.h. die Existenz einer Temperatur maximaler Dichte, $T_{\rho_{max}}$, eine wichtige Rolle bei der vertikalen Schichtung der Wassersäule von Seen. Das Tiefenwasser hat eine Temperatur nahe von $T_{\rho_{max}}$ und sowohl wärmere als auch kältere Temperaturen im Oberflächenwasser führen zu einer geringeren Dichte und damit einer stabilen Schichtung.

Im Ozean ist das anders, die Temperatur nimmt im Allgemeinen mit der Tiefe stets ab. Das Tiefenwasser kann sogar Temperaturen unter 0°C erreichen. Das kommt daher, dass die Salinität S einen Einfluss auf die Dichteanomalie des Wassers hat. $T_{\rho_{max}}$ sinkt mit zunehmendem S :

$$T_{\rho_{max}} = 3.98^{\circ}\text{C} - 0.213 S \quad (2.23)$$

Gleichzeitig sinkt auch der Schmelzpunkt T_S :

$$T_S = -0.054 S \quad (2.24)$$

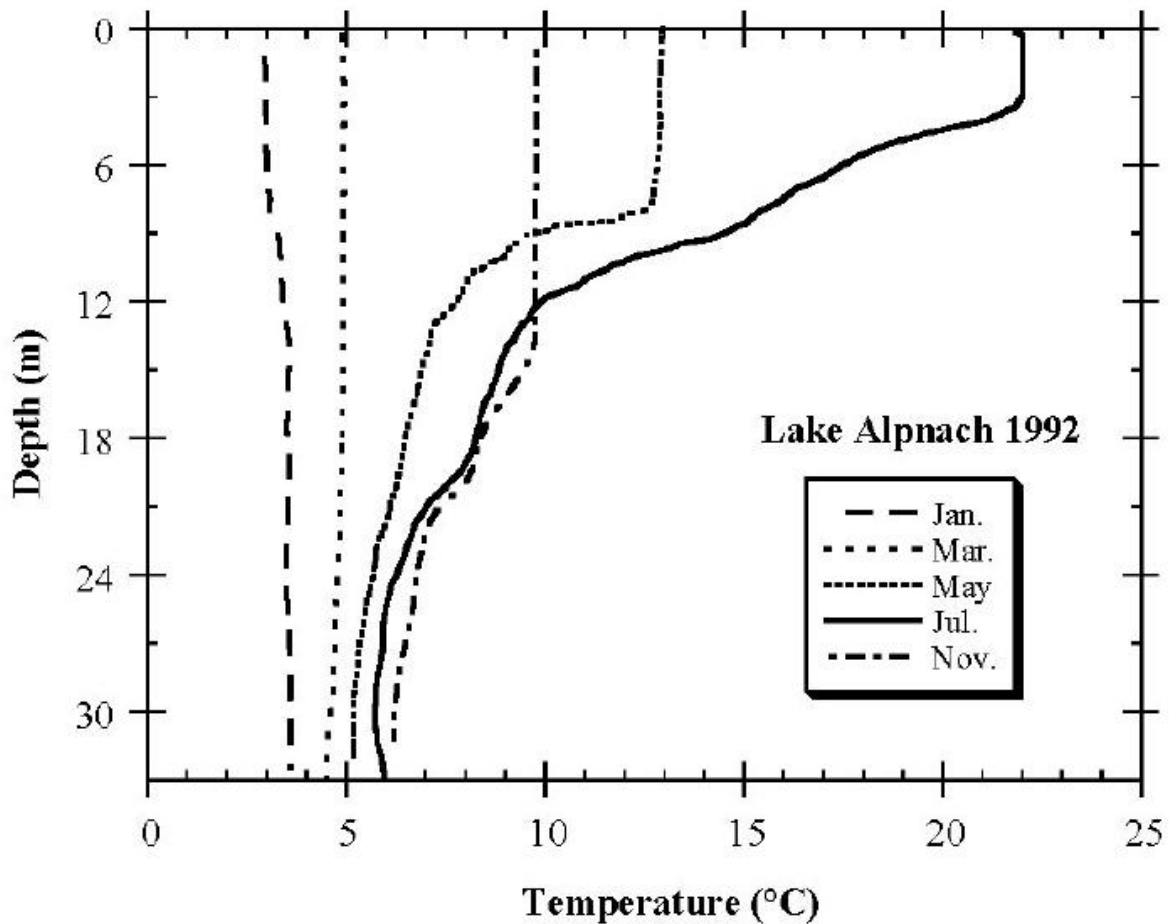


Abb. 2.4: Vertikale Temperaturprofile im Alpnachersee zu verschiedenen Jahreszeiten

Wie Abb. 2.5 zeigt, sinkt bei einer Salinität von $S = 24.8 \text{ ‰}$ $T_{\rho_{max}}$ unter T_S , so dass das Wasser gefriert, bevor es $T_{\rho_{max}}$ erreicht. Typisches Meerwasser ($S \approx 35 \text{ ‰}$) hat also keine Dichteanomalie. Somit gibt es im Ozean keine stabile inverse Temperaturschichtung.

Die Existenz von $T_{\rho_{max}}$ ist also nur in Seen von zentraler Bedeutung bei der Analyse der Stabilität der vertikalen Schichtung der Wassersäule. Es sei daran erinnert, dass der thermische Ausdehnungskoeffizient α bei $T_{\rho_{max}}$ einen Nulldurchgang hat. Das heißt, in der Nähe von $T_{\rho_{max}}$ ist der Einfluss der Temperatur auf die Dichte gering. Für $T < T_{\rho_{max}}$ ist $\alpha < 0$, für $T > T_{\rho_{max}}$ ist $\alpha > 0$.

Eine weitere Komplikation ergibt sich für tiefe Seen aus der Tatsache, dass $T_{\rho_{max}}$ auch vom Druck abhängt. Wie aus Tab. 2.1 ersichtlich, verschiebt sich $T_{\rho_{max}}$ mit wachsendem Druck zu tieferen Temperaturen. Es gilt:

$$T_{\rho_{max}}(p) = 3.98^{\circ}\text{C} - 1.99 \cdot 10^{-2} p \quad (p \text{ in bar}) \quad (2.25)$$

Das bedeutet, dass für Süßwasser $T_{\rho_{max}}$ pro 100 m Tiefenzunahme um rund 0.2°C sinkt. An der tiefsten Stelle des Baikalsees von ca. 1600 m ist somit $T_{\rho_{max}} = 0.8^{\circ}\text{C}$. In diesem See spielt dieses Phänomen tatsächlich eine wichtige Rolle.

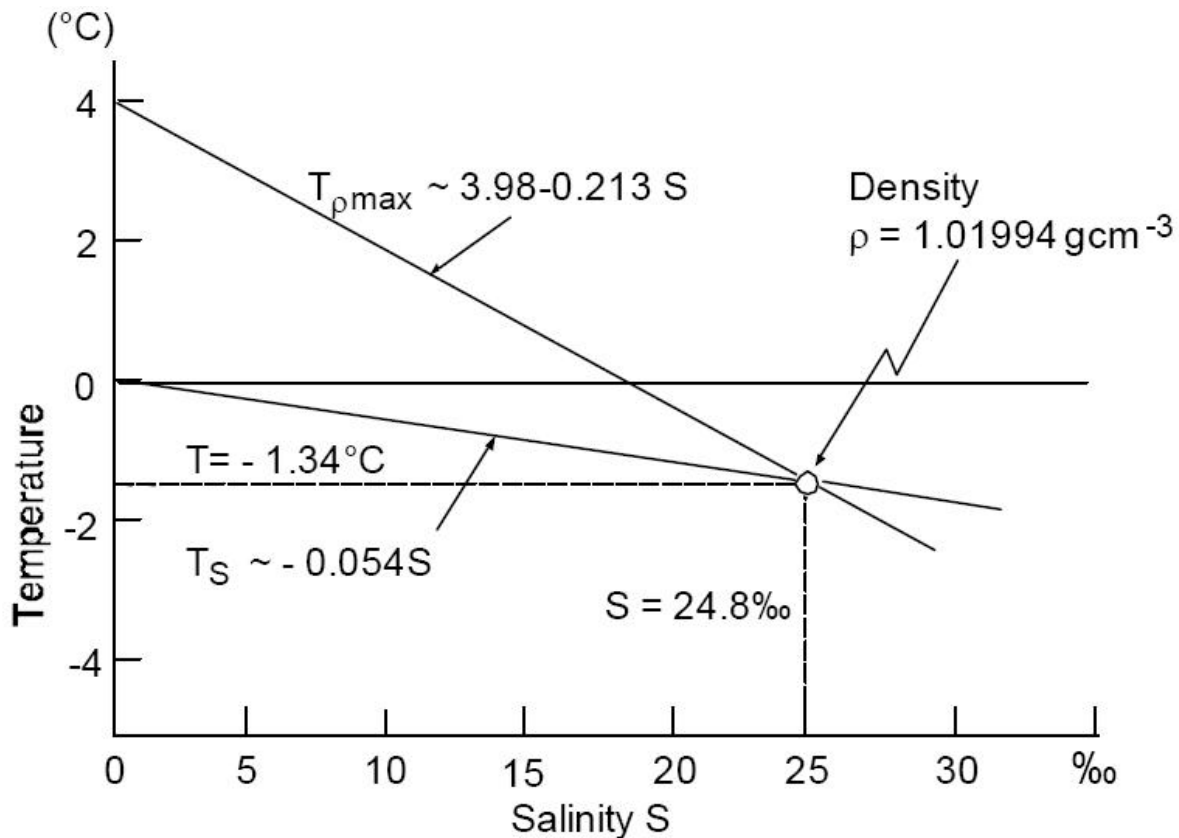


Abb. 2.5: Die Veränderung der Temperatur maximaler Dichte, $T_{\rho\text{max}}$, und der Schmelztemperatur, T_S , für Wasser wachsender Salinität S (siehe 2.23 und 2.24)

2.5 Vertikale Stabilität einer Wassersäule

Mit der vollständigen Gleichung $\rho(T, S, p)$ kann man nun, so würde man zunächst denken, eine einfache Methode entwickeln, um die vertikale Stabilität einer Wassersäule zu analysieren, indem man die Dichte ρ als Funktion der Tiefe z berechnet. Stabile Verhältnisse hätte man dann, wenn $\rho(z)$ mit der Tiefe zunimmt. Allerdings nimmt die in situ, also vor Ort in der Tiefe gemessene Dichte schon allein aufgrund der Kompression zu. Für die Stabilität ist entscheidend, wie sich ein aus seiner Ruhelage ausgelenktes Wasserpaket verhält. Das ergibt sich aus den lokalen Auf- und Abtriebskräften, d.h. durch Vergleich der Dichte des Pakets mit der Umgebung auf der jeweiligen Tiefe. Da man also zur Analyse der Stabilität die Dichten immer lokal - in derselben Tiefe - vergleicht, spielt der Effekt der Kompressibilität keine Rolle. Man kann sich auf die Dichte in Abhängigkeit von Temperatur und Salinität für eine feste Referenztiefe, meist an der Oberfläche - $\rho_0(T, S)$, beschränken.

Auftriebs- bzw. Abtriebskräfte gewährleisten die vertikale Stabilität der Wassersäule. Auf ein Wasserpaket der Dichte ρ_P mit Volumen V wirkt in z -Richtung (nach oben) die Gewichtskraft $F_G = -g\rho_P V$ und aufgrund der Verdrängung des umgebenden Wassers mit der Dichte ρ_E (environment) die Auftriebskraft $F_A = +g\rho_E V$. Die Netto-Kraft ist

also $F_{tot} = -g(\rho_P - \rho_E)V$. Diese bewirkt eine Beschleunigung in z -Richtung von

$$\ddot{z} = \frac{F_{tot}}{\rho_P V} = -g \frac{\rho_P - \rho_E}{\rho_P} \equiv -g' \quad (2.26)$$

wobei wir die „reduzierte Schwerebeschleunigung“ g' eingeführt haben, welche gegenüber dem normalen g um das Verhältnis des Dichteunterschieds zur Umgebung zur Dichte selber verringert ist. Offenbar ist dieses Verhältnis meist sehr klein, da die Dichte des Pakets nur wenig von der Dichte der Umgebung abweicht. Es bleibt somit nur ein geringes „effektives Gewicht“ des im Umgebungswasser schwebenden Pakets übrig. Der „effektive Auftrieb“ wird üblicherweise mit „buoyancy“ ($b = -g'$) bezeichnet.

An dieser Stelle lohnt sich eine kleine Exkursion zur unterschiedlichen Bedeutung von träger und schwerer Masse in der Hydrodynamik. Offensichtlich hängt die Beschleunigung des Wasserpakets ganz empfindlich von möglicherweise sehr geringen Dichteunterschieden $\Delta\rho$ zur Umgebung ab. Hier geht es um Unterschiede in der schweren Masse, welche die Gewichts- bzw. Auftriebskräfte definieren. Im Nenner des in g' auftretenden Faktors $\Delta\rho/\rho$ tritt hingegen die träge Masse des Wasserpakets auf, welche durch die buoyancy beschleunigt wird. Bei der Division der kleinen Differenz in der „schweren Dichte“ durch die große „träge Dichte“ spielt es keine wesentliche Rolle, ob im Nenner die Dichte des Pakets oder der Umgebung eingesetzt wird. Man kann also den Einfluss kleiner Dichteveränderungen auf die *träge Masse* (Beschleunigung) sehr wohl vernachlässigen, im Allgemeinen aber nicht deren Einfluss auf das *Gewicht* (Auftrieb/Abtrieb). Konkret: Dichteschichtung, Auftrieb etc. müssen in den Gleichungen der Hydrodynamik berücksichtigt werden, nicht aber der Einfluss von Dichteveränderungen auf die Beschleunigung unter der Wirkung einer bestimmten Kraft. Die Vernachlässigung von Variationen der trägen Masse nennt man die *Boussinesq Approximation*.

Stellen wir uns nun vor, dass das Paket aus der Ruhelage, wo $\rho_P = \rho_E$ und $z = 0$ gilt, vertikal um einen Betrag z ausgelenkt wird. Die Dichte in der Umgebung können wir für kleine z annähern durch $\rho_E(z) = \rho_E(0) + d\rho/dz \cdot z = \rho_P + d\rho/dz \cdot z$, wobei $d\rho/dz$ den vertikalen Gradienten der Umgebungsdichte, also des Dichteprofiles der Wassersäule, darstellt. Einsetzen in (2.26) ergibt:

$$\ddot{z} = \frac{g}{\rho_P} \frac{d\rho}{dz} z \quad (2.27)$$

Das ist offensichtlich die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{-\frac{g}{\rho_P} \frac{d\rho}{dz}} \quad (2.28)$$

Diese Stabilitätsfrequenz wird üblicherweise mit N (Dimension T^{-1}) bezeichnet und nach ihren Erfindern Brunt-Väisälä Frequenz genannt. Beschreiben wir $\rho(T, S)$ durch die weiter oben eingeführten Koeffizienten der thermischen Expansion $\alpha = -\rho^{-1}d\rho/dT$ und der halinen Kontraktion $\beta = \rho^{-1}d\rho/dS$ und vernachlässigen wir im Nenner von g/ρ kleine Dichteunterschiede (Boussinesq Approximation), so kann die Brunt-Väisälä

Frequenz wie folgt geschrieben werden:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = g \left[\alpha \left(\frac{dT}{dz} \right) - \beta \left(\frac{dS}{dz} \right) \right] \quad (2.29)$$

N beschreibt die Kreisfrequenz, mit der ein Wasserpaket (falls es keinen Austausch mit seiner Umgebung hat) um seine Gleichgewichtstiefe oszilliert. Natürlich schwingt es nur dann, wenn es immer eine rücktreibende Kraft erfährt. Das ist der Fall, wenn N reell, also N^2 positiv ist. Dann ist die Wassersäule stabil geschichtet. Die Stabilität einer Wassersäule kann somit folgendermaßen formuliert werden:

$$N^2 \begin{cases} > 0 & \textit{stabil} \\ = 0 & \textit{labil} \\ < 0 & \textit{instabil} \end{cases} \quad (2.30)$$

Stabile Schichtungen entsprechen also negativen vertikalen Dichtegradienten $d\rho/dz$, d.h. Situationen, in denen die (auf eine Referenztiefe bezogene) Dichte nach oben hin abnimmt. Instabile Dichteschichtungen, d.h. Situationen, in denen sich ein Wasserpaket größerer Dichte oberhalb eines Paketes kleinerer Dichte befindet, sind nicht langlebig; sie werden durch lokale Mischungsprozesse schnell eliminiert.

Die zwei Beiträge in Gl. (2.29) implizieren, dass sich die Stabilität aus dem Temperatur- und dem Salinitätsgradienten zusammensetzt. Im Allgemeinen können weitere Inhaltsstoffe zur Stabilität beitragen wie beispielsweise nicht-ionische Stoffe (Gase, Kieselsäure), welche in der zur Salinitätsmessung meist verwendeten elektrischen Leitfähigkeit nicht erscheinen, oder suspendierte Partikel. In Seen unserer Klimazone ist die Stabilität in der oberen Thermokline durch die Temperatur, hingegen über dem Sediment und im tiefen Hypolimnion meist durch Salze bestimmt. Im mittleren Hypolimnionbereich spielen oft beide Faktoren eine Rolle. Im Meer lassen sich die Einflussbereiche weniger klar charakterisieren. In Tab. 2.4 werden drei Beispiele für die Berechnung der Stabilität gegeben.

Stabilität bzw. Instabilität einer Wassersäule können durch verschiedene Kombinationen von Temperatur- und Salzgradienten bestimmt sein. Eine besondere Situation ergibt sich dann, wenn die Beiträge der Temperatur bzw. der Salinität zum Dichtegradienten unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Zwei Fälle können unterschieden werden:

1. Temperatur stabilisierend ($\alpha \partial T / \partial z > 0$), Salinität destabilisierend ($\beta \partial S / \partial z > 0$)
2. Temperatur destabilisierend ($\alpha \partial T / \partial z < 0$), Salinität stabilisierend ($\beta \partial S / \partial z < 0$)

Wenn der stabilisierende Einfluss größer ist als der destabilisierende, ist insgesamt die Wassersäule stabil, aber wegen der unterschiedlichen molekularen Diffusivität von Wärme und Salz tritt ein neues Phänomen auf, die *Doppeldiffusion*. Die erste Konfiguration, bei welcher die Temperatur stabilisierend wirkt, heißt *Finger-Regime*, weil sich Salzungen („Finger“) vertikal in die benachbarten Wasserschichten hineinschieben. Solche

Tab. 2.4: Numerische Beispiele für die Stabilitätsfrequenz in Seen

Fall 1:	<i>Thermokline:</i>		
	$\frac{\partial T}{\partial z} = 1 \text{ K m}^{-1}$	$T = 12^\circ\text{C}$	$\frac{\partial \kappa_{20}}{\partial z} = 0$
Es folgt:	$\alpha = 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$,	$\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_{stab} \approx -\alpha \rho \frac{\partial T}{\partial z} = -0.11 \text{ kg m}^{-4}$	
	$N^2 = 1.08 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-2}$,	$N = 0.033 \text{ s}^{-1}$	(Periode = $\frac{2\pi}{N} = 190 \text{ s}$)
Fall 2:	<i>Hypolimnion, thermisch stabilisiert</i>		
	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0.01 \text{ K m}^{-1}$,	$T = 4.5^\circ\text{C}$,	$\frac{\partial \kappa_{20}}{\partial z} = 0$
Es folgt:	$\alpha = 7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$,	$\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_{stab} \approx -\alpha \rho \frac{\partial T}{\partial z} = -7 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-4}$	
	$N^2 = 6.9 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-2}$,	$N = 8.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	(Periode $\approx 2.1 \text{ h}$)
Fall 3:	<i>Hypolimnion, chemisch stabilisiert</i>		
	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$,	$\frac{\partial \kappa_{20}}{\partial z} = -0.1 (\mu\text{S/cm})^{-1} \text{ m}$	
Es folgt:	$\beta_\kappa = 0.705 \cdot 10^{-6} (\mu\text{S/cm})^{-1}$,	$\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_{stab} \approx \beta_\kappa \rho \frac{\partial \kappa_{20}}{\partial z} = -0.705 \text{ kg m}^{-4}$	
	$N^2 = 6.9 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-2}$,	$N = 8.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	(Periode $\approx 2.1 \text{ h}$)

Situation treten dort auf, wo sich kaltes, wenig salines Wasser unter wärmeres und salineres Wasser schiebt, z.B. in Fjorden, bei Zuflüssen oder als Folge starker Verdunstung (Salinität nimmt an der Wasseroberfläche zu).

Die zweite Konfiguration, bei welcher die Salinität stabilisiert, heißt *diffusives Regime*. Solche Situationen können durch den geothermischen Wärmefluss am Seegrund, durch die Eintritt von warmen Quellen oder durch schmelzendes Eis hervorgerufen werden.

Mehr über die Doppeldiffusion findet man in [9].

2.6 Potentielle Temperatur

In obiger Diskussion der Stabilität haben wir ein interessantes Phänomen bisher vernachlässigt, das in der Atmosphäre eine große Rolle spielt: Bei der Auslenkung eines Luftpaketes ändert sich nicht nur der Druck und damit die Dichte (was beim Vergleich auf gleicher Höhe irrelevant ist), sondern aufgrund der Expansion auch die Temperatur und damit wiederum die Dichte (was nicht vernachlässigt werden kann). Dieser Effekt

ist beim Wasser aufgrund der geringen Kompressibilität weniger stark, aber zumindest im Ozean dennoch wichtig.

Wird Wasser aus der Tiefe z an die Oberfläche geholt, dehnt es sich wegen des abnehmenden hydrostatischen Druckes aus (Kompressibilität) und leistet damit Arbeit gegen den äußeren Druck p . Als Folge davon kühlt sich das Wasser ab. Falls kein Wärmeaustausch stattfindet (adiabatischer Prozess), ist die mit dem Druck verknüpfte *in situ* Temperaturveränderung gegeben durch die Relation (Lord Kelvin, 1875):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_{ad} = \frac{T^* \alpha}{\rho c_p} \quad [\text{K Pa}^{-1}] \quad (2.31)$$

Dabei bedeuten:

T^* : absolute Temperatur	$T^* \approx 278 \text{ K}$
α : thermischer Expansionskoeffizient	$\alpha \approx 1.6 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} (T \approx 5^\circ\text{C}; S \approx 35 \text{ ‰})$
ρc_p : spezifische Wärme bei $p = \text{konst.}$	$\rho c_p = 4.0 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}$ (Meerwasser)

Diese Temperaturerhöhung pro Druckeinheit unter adiabatischen Bedingungen (engl.: *adiabatic lapse rate*) beträgt für die angegebenen Zahlen:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_{ad} \approx 1.1 \cdot 10^{-8} \text{ K Pa}^{-1}$$

Meistens wird nicht die Temperaturerhöhung pro Druckeinheit, sondern der adiabatische Temperaturgradient angegeben. Für die Umrechnung wird die hydrostatische Annahme getroffen:

$$\begin{aligned} dp &= -g\rho dz && (z \text{ positiv nach oben}) \\ \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{ad} &= -g\rho \left. \frac{\partial T}{\partial p} \right|_{ad} = -\frac{\alpha g T^*}{c_p} \equiv -\Gamma(T, S, p) \end{aligned} \quad (2.32)$$

mit dem entsprechenden typischen Wert von:

$$\Gamma = 0.11 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1} \quad \text{oder } 0.11 \text{ K pro km Tiefe}$$

In Seen dagegen ist α bei tiefen Temperaturen sehr gering (z.B. $\alpha = 16 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ für $T = 5^\circ\text{C}$); entsprechend wird der Gradient unbedeutend. Dies gilt nicht für tiefe tropische Seen, wo die Temperatur auch im Tiefenwasser $>20^\circ\text{C}$ ist und somit α groß wird. Entsprechend ist dort die adiabatische Korrektur notwendig, wie das Beispiel des Malawisees zeigt (Abb. 2.6).

Die Bedeutung des adiabatischen Gradienten besteht also darin, dass sich die *in situ* Temperatur T ändert, falls sich das Wasserpaket vertikal verschiebt. In einer homogenen Wassermasse nimmt also die *in situ* Temperatur nach unten zu. Dieser Umstand ist störend, wenn die Temperatur als Erhaltungsgröße bei der Verfolgung von Wassermassen verwendet werden soll (z.B. bei Bilanzierung). Es lässt sich eine *potentielle*

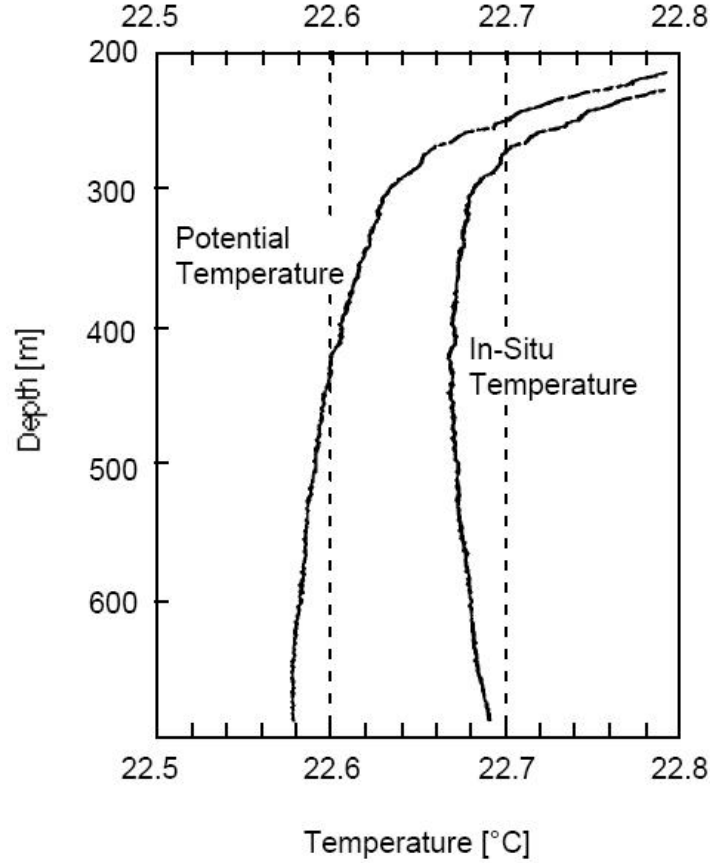


Abb. 2.6: *In situ* Temperatur und potentielle Temperatur im Malawisee [8]

Größe definieren, bei der diese Druckabhängigkeit wegkorrigiert wird, und die somit eine druckunabhängige Erhaltungsgröße darstellt. Es wird deshalb die folgende Definition getroffen:

Potentielle Temperatur $\Theta(z, z_0)$ = Temperatur des aus der Tiefe z stammenden Wasserpaketes, nachdem dieses adiabatisch (genauer isentropisch, d.h. ohne Wärme- und Salzaustausch) in die Tiefe z_0 gebracht worden ist.

In Formeln ausgedrückt:

$$\Theta(z, z_0) = T(z) - \int_z^{z_0} \Gamma [\Theta(z, z'), S(z), p(z')] dz' \quad (2.33)$$

Die potentielle Temperatur ist nach Gl. (2.33) eine Funktion von Temperatur, Druck und Salinität in der Ursprungstiefe z und des Druckes in der Referenztiefe z_0 . Die vertikale Koordinate z ist positiv nach oben gewählt. Die auf die Temperatur bezogene *lapse rate* Γ hängt ebenfalls von der (lokalen) Temperatur, vom Druck und von der Salinität ab (siehe Gl. 2.32), da α und c_p ihrerseits von diesen Größen abhängen. Daher verändert sich Γ während der Integration; nur die Salinität des Wasserpaketes bleibt konstant (beim isentropischen Prozess), daher das Argument $S(z)$ im Integranden von Gl. (2.33).

Oft wird als Referenztiefe die Wasseroberfläche gewählt ($z_0 = 0$); aber gerade in der Ozeanographie wird zur Charakterisierung des Tiefenwassers oft auch $z_0 = 4000$ m als Referenztiefe verwendet, um die Integration über die *lapse rate* nicht über zu große vertikale Distanzen durchführen zu müssen.

Analog lässt sich eine potentielle Dichte definieren, die sich anstelle der *in situ* Temperatur aus der potentiellen Temperatur berechnen lässt:

Potentielle Dichte ρ_Θ = Dichte, die ein Wasserpaket hätte, wenn dieses *isentropisch* in die Referenztiefe z_0 gebracht würde.

Wird die Referenztiefe nicht an der Wasseroberfläche gewählt, wird zur Berechnung der potentiellen Dichte der Effekt der Kompressibilität weggelassen, d.h. es wird angenommen, der hydrostatische Druck sei null.

Hinweis: In der Ozeanographie genügt es in vielen Fällen, den Integranden von Gl. (2.33) durch $\Gamma[T(z), S(z), p(z)]$ zu ersetzen, weil die Temperaturveränderungen im Wasserpaket während des Transportes zwischen der Tiefe z und z_0 klein bleiben und somit auch α und c_p nur schwach variieren. Auch in Süßgewässern variiert T nicht stark, aber weil T oft in der Nähe der Temperatur maximaler Dichte liegt, kann Γ während der Integration sogar das Vorzeichen wechseln, nämlich dann, wenn die Temperatur im transportierten Wasserpaket das lokale $T_{\rho_{max}}$ erreicht. Das ist auch der Grund, wieso das Konzept der lokalen Dichte streng genommen zu Widersprüchen führt. Man kann nämlich zeigen, dass in gewissen zwei- oder dreidimensionalen Temperaturfeldern die potentielle Dichte vom Weg abhängig ist, entlang dem man ein Wasserpaket von der Tiefe z in die Tiefe z_0 transportiert. Ferner eignet sich streng genommen der vertikale Gradient der potentiellen Dichte (siehe unten) nicht für eine Evaluation der Stabilität der Wassersäule (siehe [10]).

Mit der Einsicht, dass sich die Temperatur und damit die Dichte bei vertikalen Auslenkungen ändern, müssen wir auch unsere Überlegungen zur Stabilität anpassen. Ähnlich wie die Kompressibilität bei der Stabilität keine Rolle spielt, kann auch der adiabatische Temperaturgradient keinen Einfluss haben, da er ja sowohl Wasserpaket als auch Umgebung betrifft. Das bedeutet, dass (bei konstanter Salinität) die labile Schichtung nicht mehr bei einem verschwindenden Temperaturgradienten auftritt, sondern genau dann, wenn der Temperaturgradient dem adiabatischen Gradienten entspricht und somit die potentielle Temperatur konstant ist.

Allgemeiner mit der Dichte formuliert (um den Effekt eines allfälligen Salinitätsgradienten mit zu berücksichtigen): Eine vertikale Wassersäule ist dann stabil, wenn ein Wasserpaket, das isentropisch (adiabatisch) vertikal aus seiner Gleichgewichtslage verschoben wird, immer eine rücktreibende Kraft erfährt. Diese Aussage ist gleichbedeutend zur Forderung, dass die isentropische Dichteänderung pro Tiefe größer ist als diejenige der Wassersäule:

$$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{isen} - \frac{d\rho}{dz} > 0 \quad (2.34)$$

Diese Bedingung ist identisch mit der oben eingeführten Bedingung $N^2 > 0$, wenn wir

die Definition der Brunt-Väisälä Frequenz wie folgt verallgemeinern:

$$N^2 = \frac{g}{\rho} \left[\left(\frac{d\rho}{dz} \right)_{isen} - \frac{d\rho}{dz} \right] = g \left[\alpha \left(\frac{dT}{dz} + \Gamma \right) - \beta \frac{dS}{dz} \right] = g \left[\alpha \left(\frac{d\Theta}{dz} \right) - \beta \frac{dS}{dz} \right] \quad (2.35)$$

Gl. (2.35) liefert somit eine elegante und allgemeine Methode, die Stabilität einer Wassersäule zu analysieren. In vielen Fällen ist allerdings die *lapse rate* deutlich kleiner als der lokale Temperaturgradient, so dass man Γ vernachlässigen kann. Dann kommen wir zurück zu der im vorherigen Abschnitt hergeleiteten Formel für N^2 (Glg.2.29).

2.A Anhang - Dichte von Wasser mit kleiner Salinität

$$\rho(T, S, p) = \rho^0(T, S, p) \left[1 - \frac{p}{K_m} \right]^{-1} \quad (2.A.36)$$

$$\begin{aligned} \rho^0(T, S) = & 0.9998395 + 6.7914 \cdot 10^{-5}T - 9.0894 \cdot 10^{-6}T^2 \\ & + 1.0171 \cdot 10^{-7}T^3 - 1.2846 \cdot 10^{-9}T^4 + 1.1592 \cdot 10^{-11}T^5 \\ & - 5.0125 \cdot 10^{-14}T^6 + \rho^1(T, S) \end{aligned} \quad (2.A.37)$$

- $\rho^0(t, S)$ [g cm⁻³]: Dichte von reinem Wasser bei mittlerem Atmosphärendruck (1.013 bar, entspricht Meereshöhe)
- p [bar]: hydrostatischer Druck im Wasser (abzüglich des Luftdrucks, d.h. $p = 0$ an der Wasseroberfläche)
- T [°C]: Wassertemperatur
- $\rho^1(T, S)$ [g cm⁻³]: Einfluss der Salinität auf die Dichte
- $K_m(T, S, p)$ [bar]: Kompressibilitätsmodul (vgl. Gl. 2.6 und 2.7)

Für $S = 0$ hat $\rho^0(T, S)$ ein Maximum ($T_{\rho max}$: Temperatur maximaler Dichte):

$$\begin{aligned} T_{\rho max}(S = 0, p = 0) &= 3.9839^\circ C \\ \rho^0(T_{\rho max}, S = 0) &= 0.9999720 \text{ g cm}^{-3} \end{aligned} \quad (2.A.38)$$

2.B Anhang - Internationale Zustandsgleichung für Meerwasser (Unesco-Formel)

1980 wurden alle experimentellen Daten über die Abhängigkeit der Dichte als Funktion von Temperatur, Salinität und Druck zusammengetragen und in einem UNESCO-Report veröffentlicht. Demgemäß wird die Dichte durch die Funktion

$$\rho(S, T, p) = \frac{\rho(S, T, p = 0)}{1 - \frac{p}{K_S(S, T, p)}} \quad (2.B.1)$$

empirisch beschrieben, wobei der Zähler $\rho(S, T, p = 0)$ die Dichte des Wassers an der Oberfläche ($p=0$) bedeutet.

Die Beziehung ist von der gleichen Form wie Gl. (2.A.36) - tatsächlich ist letztere ein auf kleine Salinitäten beschränkter Spezialfall von Gl. (2.B.1) - nur dass K_S den mittleren Kompressibilitätsmodul bedeutet (*secant bulk modulus*), welcher definiert ist durch

$$K_S = -v \frac{p}{\Delta v} \quad (2.B.2)$$

(vgl. Gl. 2.6; v = spezifisches Volumen von Wasser)

Sowohl $\rho(S, T, p = 0)$ als auch $K_S(S, T, p)$ werden als Potenzreihen von Salinität, Temperatur und Druck approximiert:

$$\rho(S, T, p = 0) = A + B \cdot S + C \cdot S^{3/2} + D \cdot S^2 \quad (2.B.3)$$

$$K_S(S, T, p) = E + F \cdot S + G \cdot S^{3/2} + (H \cdot + I \cdot S + J \cdot S^{3/2})p + (M + N \cdot S)p^2 \quad (2.B.4)$$

Die Koeffizienten $A \dots N$ sind Polynome von maximal f5nfitem Grad in T der Form

$$A(T) = \sum_{n=0}^5 \lambda_n \cdot T^n \quad (2.B.5)$$

Die entsprechenden Koeffizienten λ_i sind in Tab. 2.5 zusammengestellt.

Aus all diesen Formeln lassen sich die isotherme Kompressibilit5t (K_T), der thermische Ausdehnungskoeffizient (α) und der Koeffizient der halinen Kontraktion (β_S) als Funktion von S , T und p berechnen.

Tab. 2.5: Koeffizienten λ_n (Gl. 2.B.5) f5r die in (2.B.3) und (2.B.4) definierten Gr5Ben A ... N [11].

	A	B	C
T0	+999.842594	+8.24493 $\cdot 10^{-1}$	-5.72466 $\cdot 10^{-3}$
T1	+6.793952 $\cdot 10^{-2}$	-4.0899 $\cdot 10^{-3}$	+1.0227 $\cdot 10^{-4}$
T2	-9.09529 $\cdot 10^{-3}$	+7.6438 $\cdot 10^{-5}$	-1.6546 $\cdot 10^{-6}$
T3	+1.001685 $\cdot 10^{-4}$	-8.2467 $\cdot 10^{-7}$	
T4	-1.120083 $\cdot 10^{-6}$	+5.3875 $\cdot 10^{-9}$	
T5	+6.536332 $\cdot 10^{-9}$		
	D	E	F
T0	+4.8314 $\cdot 10^{-4}$	+19652.21	+54.6746
T1		+148.4206	-0.603459
T2		-2.327105	+1.09987 $\cdot 10^{-2}$
T3		+1.360477 $\cdot 10^{-2}$	-6.167 $\cdot 10^{-5}$
T4		-5.155288 $\cdot 10^{-5}$	
	G	H	I
T0	+7.944 $\cdot 10^{-2}$	+3.239908	+2.2838 $\cdot 10^{-3}$
T1	1.6438 $\cdot 10^{-2}$	+1.43713 $\cdot 10^{-3}$	-1.0981 $\cdot 10^{-5}$
T2	-5.3009 $\cdot 10^{-4}$	+1.16092 $\cdot 10^{-4}$	1.6078 $\cdot 10^{-6}$
T3		-5.77905 $\cdot 10^{-7}$	
	J	M	N
T0	+1.91075 $\cdot 10^{-4}$	+8.50935 $\cdot 10^{-5}$	-9.9348 $\cdot 10^{-7}$
T1		-6.12293 $\cdot 10^{-6}$	+2.0816 $\cdot 10^{-8}$
T2		+5.2787 $\cdot 10^{-8}$	+9.1697 $\cdot 10^{-10}$