

**Fakultät für Physik und Astronomie
Universität Heidelberg**

Bachelorarbeit in Physik
verfasst von Elsa Wilken

Elsa - Marei Wilken

geboren in Hamburg (Deutschland)

2014

Helium-Altersdatierung bei radioaktivem Ungleichgewicht

Diese Bachelorarbeit wurde von Elsa Wilken verfasst
Institut für Umweltphysik, Universität Heidelberg
Unter der Betreuung von Dr. Tobias Kluge

Abstract

In this report I present a method for the age computation of carbonates via helium age determination considering radioactive disequilibrium. By using the quantity of the elements of the radioactive series and the amount of helium in the substance of interest conclusions on its age are drawn. In this context several computation methods are analyzed and compared with each other. In particular, radioactive disequilibrium is investigated and discussed with regard to conditions at which simplifications can be justified. Under certain initial conditions we found relative deviations in the range of 80% for an age of 50 ka. Especially for rather young minerals it makes sense to extend the U-Th-He methods by the assumption of radioactive disequilibrium, as it is difficult to estimate their age with common methods. In addition, we present the implementation for the age computation which estimates the theoretical age of carbonates using the quantities of helium and radioactive elements as input. We found a good agreement between the computed helium age and an age which is determined independently from the uranium/thorium age determination measurements.

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung des Alters von Karbonaten durch die Helium-Altersdatierung bei radioaktiven Ungleichgewicht. Aus den Stoffmengen der Elemente der Zerfallsreihen und der gemessenen Menge an Helium werden Rückschlüsse auf das Alter gezogen. Die Rechnungen wurden auf verschiedene Weise durchgeführt und miteinander verglichen. Insbesondere wird auf radioaktives Ungleichgewicht eingegangen und darauf, unter welchen Umständen Vereinfachungen gemacht werden können. Unter gewissen Anfangsbedingungen kann es hier bei einem Alter von 50 ka zu relativen Abweichungen im Bereich von 80% kommen. Die Betrachtung des Ungleichgewichts ist vor allem für junge Mineralien interessant, da sie schlecht mit anderen Methoden datierbar sind und so die gängigen U-Th-He Verfahren auf jüngere Proben ausgeweitet werden können. Desweiteren wird ein Programm vorgestellt, welches aus den gemessenen Mengen von Helium und den radioaktiven Elementen das Alter des Gesteins berechnet. Es wurde eine gute Übereinstimmung zwischen dem Helium-Alter und einem Alter gefunden, welches durch die Uran/Thorium-Methode ermittelt wurde.

Contents

1	Einleitung	6
1.1	Historischer Rückblick der Helium Altersdatierung	7
1.2	Radioaktiver Zerfall	7
1.3	Idee der Helium-Altersdatierung	9
1.3.1	Zerfallsreihen	9
1.3.2	Notwendige Voraussetzungen der Helium-Altersdatierung . .	10
1.3.3	Vorteile der Helium-Altersdatierung	11
1.3.4	Probleme der Helium-Altersdatierung	11
1.3.5	Messung des Heliums	11
2	Implementierung der Heliumaltersdatierung	
	- differentielle Methode	13
3	Säkulares Gleichgewicht	18
4	Diskrete Analyse des Zerfalls	23
5	Ergebnisse	28
5.1	Fehlerdiskussion	34
6	Fazit	37
7	Anhang	40
7.1	Alternative Rechnung	40
7.2	Zu "Säkuläres Gleichgewicht"	
	Analyse der relevanten Anfangsbedingungen	43
7.3	Daten	45
7.4	Implementierung der Differentiellen Methode	49
7.5	Analyse der Diskreten Methode im Vergleich zu der Differentiellen .	54
7.5.1	Abweichungen der Helium-Mengen bei verschiedenen Zeitin-	
	tervallen	54
7.5.2	Abweichungen der Alter bei verschiedenen Zeitintervallen . .	55

ichungen zu dem Alter aufweist, welches durch andere Methoden ermittelt wurde. Meist ist das Helium-Alter kleiner als das, welches anders ermittelt wurde. Jedoch gibt es zu viele Ausnahmen dieser Regel, dass sie mit eingerechnet werden können. KEEVIL [11] schlug vor, das Helium-Alter nur als zweites oder drittes Kriterium zu nutzen, wenn andere Methoden nicht möglich sind.

Für Apatit und Zirkon, also relativ lange Zeiträume, ist die Heliumdatierung relativ erfolgreich [16].

1.1 Historischer Rückblick der Helium Altersdatierung

1868 beobachteten Jansen und Lockyer [9] eine helle, gelbe Linie in dem Spektrum der Sonne, welche sie mit keinem ihnen bekannten Element identifizieren konnten, also nannten Sie es Helium. Nach und nach wurde nun das gesamte Spektrum von Helium ermittelt. Bis 1895 wurde kein Beweis gefunden, dass es Helium auch auf der Erde gibt. Auf der Suche nach Argon in Mineralien machte Miers auf eine Arbeit von Hillebrande aufmerksam, der eine messbare Menge eines unbekanntes Gases in Uran entdeckt hatte [18]. Lockyer konnte dieses Gas als Helium identifizieren. Es wurde herausgefunden, dass bei größeren Mengen von Uran oder Thorium meist auch Helium zu finden ist. Aus diesem und noch anderen Gründen vermuteten Rutherford und Soddy, dass Helium das α -Teilchen sei.¹

Zwischen 1905 und 1911 hat R.J Strutt eine Vielzahl von Papern herausgebracht, welche die Relation von Helium zu radioaktiven Elementen zum Thema hatten.

Rutherford [18] war schließlich der Erste, der die Helium-Methode zur Ermittlung des Alters von Mineralien, Fossilien o.Ä. vorschlug.

1.2 Radioaktiver Zerfall

Als radioaktiven Zerfall bezeichnet man einen Prozess bei dem instabile Atome unter Energieverlust spontan Teilchen oder Energie emittieren. Ein Atom ist stabil, wenn es keine Wechselwirkung gibt, durch die ein energetisch günstigerer Zustand erreicht werden kann. Es wird zwischen α -, β - und γ -Strahlung unterschieden. Bei α - und β -Strahlung wandelt sich das Atom in ein anderes Element um. β -Strahlung wird der Zerfall genannt, bei dem Atome ein Elektron ausstoßen, bei γ -Strahlung wird elektromagnetische Strahlung abgegeben. Die α -Strahlung ist hierbei ausschlaggebend für die Helium-Altersdatierung. Es wird ein Heliumkern aus dem Kern ausgestoßen, welcher aus zwei Protonen und zwei Neutronen besteht. Aufgrund sehr hoher Potenzialbarrieren ist α -Strahlung nur aufgrund des Tunneleffektes möglich.

¹Das α -Teilchen wird beim α -Zerfall abgestrahlt und besteht aus zwei Protonen und zwei Neutronen, ist also ein Heliumkern.

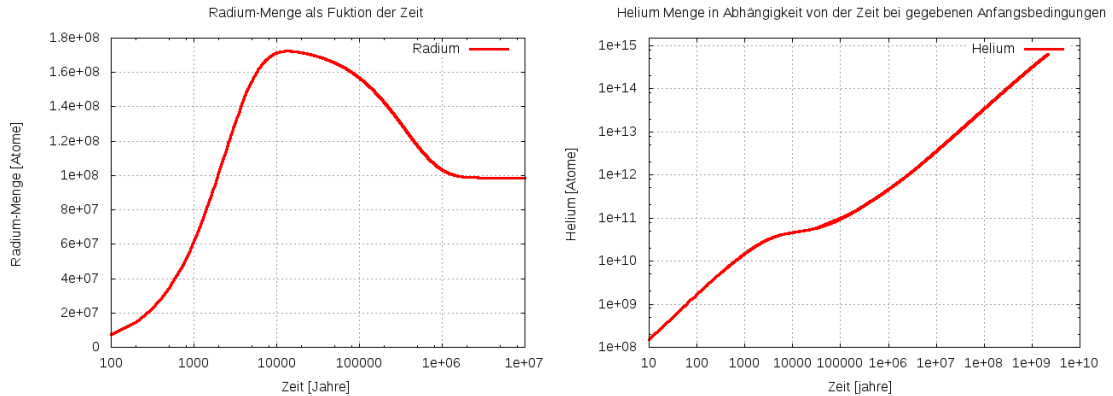


Figure 2: Links: Die Radium Menge in einem Gestein mit einer bestimmten initialen Mengen an Uran und Thorium (siehe Anfangsbedingungen 1, ohne initiales Radium) als Funktion der Zeit. Radium ist das fünfte Element der Uran-Radium Zerfallsreihe mit einer Halbwertszeit von 1602 Jahren. Rechts: Die Gesamt-Heliummenge der ganzen Zerfallsreihe. Die Anfangsbedingungen sind in Tabelle 1 zu sehen, zusätzlich wurde noch eine initiale Radium-Menge von $\sim 10^9$ Atomen mit eingerechnet. Die Abflachung der Kurve bei 10000 Jahren ist auf den Rückgang des Radiums zurückzuführen. Für sehr große Zeiten wird die Heliumkurve gegen einen konstanten Wert konvergieren.

Radioaktiver Zerfall ist ein stochastisches, kein deterministisches Phänomen, also ein zufällig ablaufender Prozess. Es kann somit nicht vorausgesagt werden, wann ein Teilchen zerfällt. Jedoch können Aussagen über den Mittelwert getroffen werden:

Im Mittel kann radioaktiver Zerfall wie folgt beschrieben werden.

Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1)$$

mit der Zerfallskonstante $\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}}$ der Halbwertszeit ² $T_{1/2}$ und N_0 ist die Anfangsmenge des Elementes.

Atome, welche durch radioaktiven Zerfall entstehen, sind oft wiederum radioaktiv, es entsteht also eine sogenannte Zerfallsreihe. Die Stoffmenge der Tochterelemente ist dabei von zwei Faktoren abhängig, dem Zerfall $\exp(-\lambda_{\text{tochterelement}} t)$ und des Anstieges aufgrund des Zerfalls des Elternnuklids. Nach einer gewissen Zeit kommt es unter Umständen zu einem Gleichgewicht zwischen diesen beiden Prozessen, (siehe Kapitel3) In Abbildung 2 ist beispielhaft der Verlauf der Radium Stoffmenge mit der Zeit zu sehen. Radium ist das fünfte Element der Uran-Radium-

²die Halbwertszeit ist die Zeit, nach der die Hälfte des Stoffes zerfallen ist

Zerfallsreihe.

Anfangsbedingungen 1
$^{238}U_{initial} = 2.75 * 10^{14} \text{ Atome}$
$^{234}U_{initial} = 2.33 * 10^{10} \text{ Atome}$
$^{230}Th_{initial} = 8.25 * 10^9 \text{ Atome}$
$^{232}Th_{initial} = 1.16 * 10^{12} \text{ Atome}$

Table 1: Anfangsbedingungen 1. Die Werte haben sich als typische Werte bei den Karbonaten ergeben.

Der anfängliche Anstieg ist somit auf den Zerfall des vierten Zerfallskettenglieds zurückzuführen(^{230}Th). Nach ca. 10000 Jahren sinkt die Radium-Menge wieder, was auf eine Verringerung der ^{230}Th -Menge aufgrund des Zerfalls zurückzuführen ist. Die konstante Phase ist dann schließlich auf das Gleichgewicht(für Erklärung siehe 3) zwischen ^{230}Th und ^{234}U zurückzuführen, welches nach ca. 10 Halbwertszeiten von ^{230}Th eintritt. Alle Elemente einer Zerfallsreihe, welche durch α -Zerfall zerfallen, tragen zu der Menge an entstehenden Helium bei, da pro zerfallendem Atom ein Heliumkern entsteht.

1.3 Idee der Helium-Altersdatierung

Bei der Helium-Altersdatierung wird ausgenutzt, dass bei α -Zerfall ein Heliumkern frei wird. Durch den Zerfall von radioaktiven Elementen in Gesteinen/Mineralien/Fossilien etc. kann Helium über die Zeit gut akkumulieren. Die Menge des Heliums hängt von der Menge der radioaktiven Elemente und der Zeit ab. Man kann also auf die Zeit zurueckschliessen, wenn man die Menge des Heliums und die der radioaktiven Elemente kennt. Die He-Menge dient also als Altersindikator.

1.3.1 Zerfallsreihen

Es gibt drei natürlich vorkommende Zerfallsreihen, welche alle in Tabelle 1 dargestellt sind [13].

Es ist eine Herausforderung, die Stoffmenge aller Elemente der Zerfallsreihen zu messen, welche sich in dem zu analysierenden Gestein befinden. Nach einer bestimmten Zeit (abhängig von der Halbwertszeit) ist es auch nicht mehr möglich zu bestimmen, ob eine Anfangsmenge dagewesen ist oder nicht. Demzufolge müssen vereinfachende Annahmen gemacht werden, wie, dass die Anfangsmenge

Uran-Radium-Reihe			Thorium-Reihe			Actinum-Reihe		
Nuklid	α/β	$T_{1/2}$	Nuklid	α/β	$T_{1/2}$	Nuklid	α/β	$T_{1/2}$
^{238}U	α	$4.468 \cdot 10^9 \text{y}$	$^{244}\text{Pu}^*$	α	$8 \cdot 10^7 \text{y}$	^{235}U	α	$7.03 \cdot 10^8 \text{y}$
^{234}Th	β	24.1 d	^{240}U	β	14.1h	$^{231}\text{Th}^*$	β	25.5 h
^{234}Pa	β	6.7 h	^{240}NP	β	65min	^{231}Pa	α	32760y
^{234}U	α	245500 y	^{240}Pu	α	6560y	$^{227}\text{Ac}^*$	β	21.7 y
^{230}Th	α	75380 y	^{236}U	α	$2.3 \cdot 10^7 \text{y}$	^{227}Th	α	18.7 d
^{226}Ra	α	1602 y	^{232}Th	α	$1.4 \cdot 10^{10} \text{y}$	^{223}Rn	β	23.2min
^{222}Rn	α	3.82 d	^{228}Ra	α	5.75	$^{223}\text{Fr}^*$	β	22 min
$^{218}\text{Po}^*$	α	3.11 m	^{228}Ac	β	6.15 h	^{223}Ra	α	11.43d
^{214}Pb	β	26.8 m	^{228}Th	α	1.91y	^{219}Rn	α	3.96 s
$^{214}\text{Bi}^*$	β	19.8 m	^{224}Ra	α	3.66 d	^{215}Bi	β	7.6 m
^{214}Po	α	164 μs	^{220}Rn	α	55.6 s	$^{215}\text{Po}^*$	α	1.78ms
$^{210}\text{Pb}^*$	β	22.3 y	^{216}Po	α	0.145 s	^{211}Pb	β	36.1min
$^{210}\text{Bi}^*$	β	5.012 d	^{212}Pb	β	10.64 h	$^{211}\text{Bi}^*$	α	2.14min
^{210}Po	α	138.37 d	^{212}Bi	α, β	60.5 m	^{207}Tl	β	4.77min
^{206}Pb	-	-	^{212}Po	α	10^{-7}s			
			^{208}Tl	α	3.083 m			

Table 2: Natürliche Zerfallsreihen. Es gibt Elemente, die durch zwei verschiedene Zerfallsarten in zwei verschiedene Elemente zerfallen, wenn die Wahrscheinlichkeit einer Zerfallsart unter 0.2% lag, wurde diese vernachlässigt(*) . Das Anfangsglied der Thorium-Reihe kommt in der Natur sehr selten vor, weshalb die Reihe nach dem am häufigsten vorkommenden Element ^{232}Th benannt wurde [8]

bestimmter Elemente gleich Null war. Doch zum Großteil stimmen diese Annahmen sehr gut mit der Realität überein, da der Großteil der Elemente einer Zerfallsreihe eine Halbwertszeit hat, die kleiner als ein Monat ist, sie also sehr schnell zerfallen. Vor allem Elemente mit kleinen Halbwertszeiten kommen in messbaren Mengen nur in Verbindung mit langlebigeren Eltern vor, da sie so schnell zerfallen. Ohne permanenten Nachschub sind sie praktisch schon nach ein paar Tagen nicht mehr nachweisbar. Ein Problem stellt vor allem die Messung von Radium dar. Dieses Element wird oft nicht gemessen, hat allerdings eine Anfangskonzentration, so dass daraus ein Fehler auf das mittels He-Altersdatierung gewonnene Alter entstehen kann (siehe Kapitel 5.1).

1.3.2 Notwendige Voraussetzungen der Helium-Altersdatierung

Um mit der Helium-Datierungsmethode glaubwürdige Ergebnisse zu erhalten, müssen verschieden Dinge bekannt sein:

- Ob der Helium Verlust in den Mineralien vernachlässigbar ist
- Ob es keine Veränderungen der Mineralien, aufgrund von Wechselwirkungen mit der Umwelt gab
- Ob Helium bei der Bildung des Minerals in das Gestein eingebaut wurde
- Ob die Annahme von radioaktiven Gleichgewicht gerechtfertigt ist 3

1.3.3 Vorteile der Helium-Altersdatierung

Die Helium-Altersdatierung kann in einem größeren Altersbereich eingesetzt werden (bis zu 10^8 Jahre [4]) als zum Beispiel die C14 Methode (bis 56.000 Jahren[14]). Auch gegenüber der Argon-Methode hat die Helium-Altersdatierung Vorteile [4], da die Helium-Produktionsrate größer ist und die Kontamination mit atmosphärischen Helium viel weniger wahrscheinlich, da das atmosphärische Helium (atmosphärisches Mischungsverhältnis: $5 \cdot 10^{-4}\%$ [17]) nur in Bruchteilen der Menge von Argon (0.93%) vorhanden ist.

1.3.4 Probleme der Helium-Altersdatierung

Der Verlust von Helium aus den betrachteten Mineralien hat einen großen Einfluss auf die berechneten Zeiten. Heliumkerne haben sehr eine große kinetische Energie bei dem Zerfall des Atomes, aus dem sie ausgestoßen werden. (Bei ^{238}U haben die α -Teilchen eine Energie von 4,18 MeV, wodurch in Apatite die Strecke, die das Teilchen braucht um zu stoppen, in etwa $13,54\mu\text{m}$ beträgt. ??) Ist die Geschwindigkeit des Heliumkerns zu groß, so dass die Strecke, die der Kern braucht um abgebremst zu werden, größer ist als die Größe des Kristalls, kann dies einen signifikanten Verlust von Helium zur Folge haben [6]. Die Temperatur, unter welcher die He Diffusion vernachlässigbar ist, nennt sich Schließungs Temperatur (closure temperature). PETER COPELAND [2] hat gezeigt, dass die closure Temperatur in Karbonaten $(70 \pm 10)^\circ\text{C}$ ist. Der Helium-Verlust in Karbonaten kann also vernachlässigt werden, wenn die Temperaturen über die betrachteten Zeiten kleiner als $(70 \pm 10)^\circ\text{C}$ waren. Die immer noch auftretenden Fluktuationen im Helium-Vorkommen können von Flüssigkeitseinschlüssen kommen.(FANALE 1961 [5]).

1.3.5 Messung des Heliums

Die totale Helium-Konzentration C_{tot} in Gesteinen setzt sich aus folgenden Komponenten zusammen: [13]

$$C_{tot} = C_{rad} + C_{eq} + C_{air} \quad (2)$$

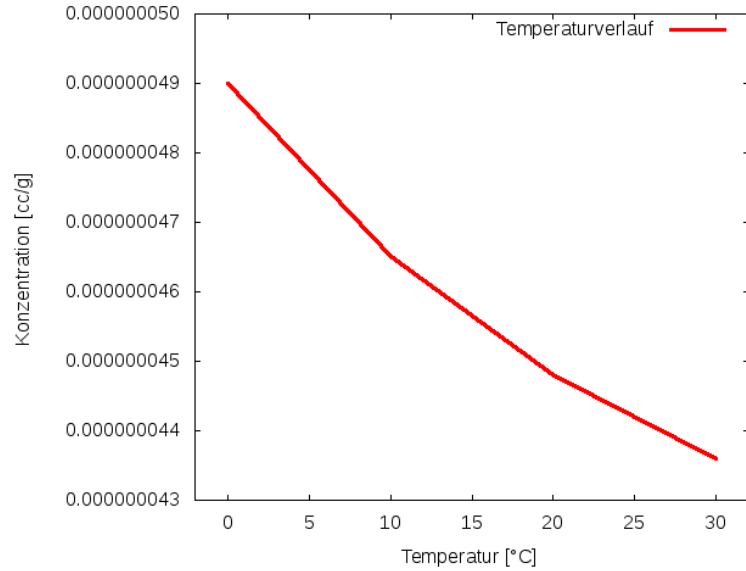


Figure 3: Helium-Konzentration in Wasser als Funktion der Temperatur. Der Salzgehalt wird vernachlässigt. Die Daten stammen aus der Arbeit von Tobias Kluge [13]

wobei C_{eq} das im Wasser von Einschlüssen gelöste und C_{air} das in Lufteinschlüssen enthaltenen Helium bezeichnet. C_{rad} ist das Helium, welches durch den Zerfall entsteht. Aus 2 folgt:

$$C_{rad} = C_{tot} - (C_{eq} + C_{air})$$

Die Gleichgewichts-Konzentration C_{eq} hängt von dem atmosphärischen Druck, dem Salzgehalt des Wassers und der Gleichgewichts-Temperatur T ab.

Aus Abbildung 3 kann nun entnommen werden, dass bei einer Temperatur von 10°C eine Heliumkonzentration von ca. $4,65 * 10^{-8} \frac{cc}{g_{Wasser}}$ auftritt. Bei einem typischen Gehalt von Einschlüssen von einem micro-Liter pro Gramm Gestein und einer Dichte von Wasser von $\rho = 999,7 \frac{kg}{m^3}$ [19] folgt

$$C_{eq} = 4,65 * 10^{-11} \frac{cc}{g_{Kalzit}}$$

$$\hat{=} 1,25 * 10^9 \text{ Atome}$$

Das Helium aus den Lufteinschlüssen mit einem typischen Mischungsverhältnis von $5,24 * 10^{-6}$ führt mit einer Luftdichte von $\rho = 1,2466 \frac{kg}{m^3}$ und einem typischem Gehalt von Einschlüssen von einem micro-Liter pro Gramm zu einer absoluten Atommenge von:

$$9,83 * 10^{10} \text{ Atome}$$

$$\rightarrow C_h = C_{air} + C_{eq} = 9,96 * 10^{10} \text{ Atome}$$

Das Luft/Wasservolumenverhältnis A ist sehr variabel, ein mittlerer Wert ist ca. 1, d.h. das Gesamtheliumsvolumen aus Lufteinschlüssen entspricht dem aus Wassereinschlüssen [13]

Zeit	Quotient $\frac{He_{rad}}{He_{Einschl.}}$
1000	0,0002
10000	0,0026
100000	0,530
1000000	4,17

Table 3: Es wird der Quotient aus radiogenem Helium und dem Helium, welches aus den Einschlüssen stammt abhängig von der Zeit dargestellt.

Wird bei der Messung das Helium aus den Einschlüssen nicht berücksichtigt, so kann es sein, dass die Helium-Menge überschätzt wird. Das hat zur Folge, dass ein zu großes Alter errechnet wird.

In Abbildung 4 ist die Abweichung mit der Zeit aufgrund der Vernachlässigung des Heliums als Funktion der Zeit zu sehen. (Anfangsbedingungen 1) Die absoluten Abweichungen werden erst kleiner, da die Alter sich aneinander annähern, dann wachsen sie wieder, da die Helium-Produktion der radioaktiven Elemente abnimmt. Man muss also bei der Messung des Heliums sehr genau hinschauen und darf auch die Einschlüsse nicht vernachlässigen.

Im Folgenden werden verschiedene Methoden dargestellt, um aus den Messdaten, der Stoffmengen der radioaktiven Elemente und der Menge von Helium das Alter zu ermitteln.

2 Implementierung der Heliumaltersdatierung - differentielle Methode

Zerfällt ein Atom mit der Zerfallskonstante λ_1 in weiteres radioaktives Element, welches wiederum mit der Zerfallskonstante λ_2 zerfällt, kann die Stoffmenge des zweiten Elementes beschrieben werden durch (siehe S.E.M DURRANCE [3]):

$$dN_2(t) = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t)$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0(t) (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_2^0(t) e^{-\lambda_2 t}$$

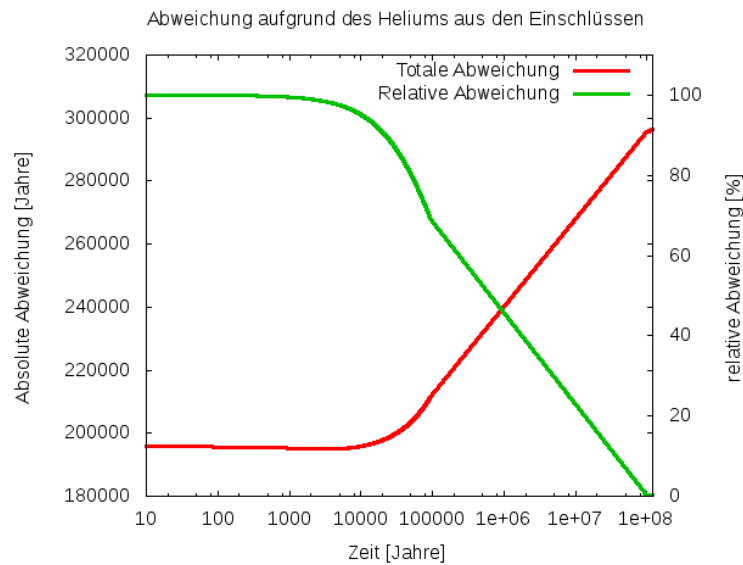


Figure 4: Es sind die Abweichungen aufgrund der Vernachlässigung des Heliums aus den Einschlüssen als Funktion der Zeit aufgetragen, es wurde eine Temperatur von 10°C angenommen. Bei größeren Temperaturen werden die Abweichungen geringer und bei kleineren größer, siehe dazu 3. Der Anstieg nach 10000 Jahren kommt daher, dass die zerfallende Helium-Menge abnimmt, also eine größere Zeit gebraucht wird, um die vernachlässigt Menge von 1248904277 Atomen zu produzieren. Die Abnahme der Helium-Produktion ist auf die Verminderung von ^{230}Th zurückzuführen.

In einer Zerfallsreihe ist die Lösung für das n-te Element gegeben als:

$$N_n(t) = \sum_{x=1}^n C_x e^{-\lambda_x t}$$

mit

$$C_x = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1} \frac{N_1^0(t)}{(\lambda_1 - \lambda_x)(\lambda_2 - \lambda_x) \dots (\lambda_n - \lambda_x)}$$

ohne $(\lambda_x - \lambda_x)$

Wenn auch die Tochterelemente eine Anfangsstoffmenge haben ($N_n^0(t) \neq 0$), werden die Lösungen der Funktionen der einzelnen Elemente nach dem gleichen Schema wie oben aufgefüllt. Das führt zu:

$$N_n(t) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n {}^k C_x e^{-\lambda_x t} e^{-\lambda_j t}$$

mit

$${}^l C_x = N_l^0(t) \left(\prod_{k=l}^{n-1} \lambda_k \right) \left(\prod_{j=l}^n \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_x)} \right)$$

Da die Anfangsbedingungen N_n^0 nicht mehr gemessen werden können, müssen sie aus den heutigen, messbaren Werten berechnet werden.³

$$N_n^0(t) = (N_{measured} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k}^{n-1} {}^k C_x e^{-\lambda_x t} e^{-\lambda_j t})$$

Die Helium-Menge hat ihren Ursprung in der Menge der α -Zerfälle. Für jedes Element der Zerfallsreihe lässt sie die Anzahl der Zerfälle wie folgt berechnen:

$$\Delta N_n = - \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{dN_k(t)}{dt}$$

Um die tatsächliche Helium-Menge zu ermitteln, muss nun über die Menge der Zerfälle der α -Strahler summiert werden.

Diese Rechnungen wurden in einem C++ Programm implementiert 7.4. Die Idee für das Programm ist die folgende: Es wurden aus den gemessenen Elementmengen und einer Schätzung des Alters die theoretische Anfangsmengen und daraus die theoretische Gesamtmenge von Helium berechnet. Diese Menge wurde dann mit der gemessenen Helium-Menge verglichen. Da die Helium-Menge mit der Zeit

³ $N_n^0(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k}^{n-1} {}^k C_x e^{-\lambda_x t} e^{-\lambda_j t}$

streng monoton wächst (siehe Abb. 2), kann das entsprechende Alter numerisch bestimmt werden.

Um diese Berechnung zu verifizieren wurde ein weiteres Programm implementiert welches das Problem diskret betrachtet, (siehe Kapitel 4). Es wurden sehr gute Übereinstimmungen zwischen den beiden Berechnungsverfahren gefunden.

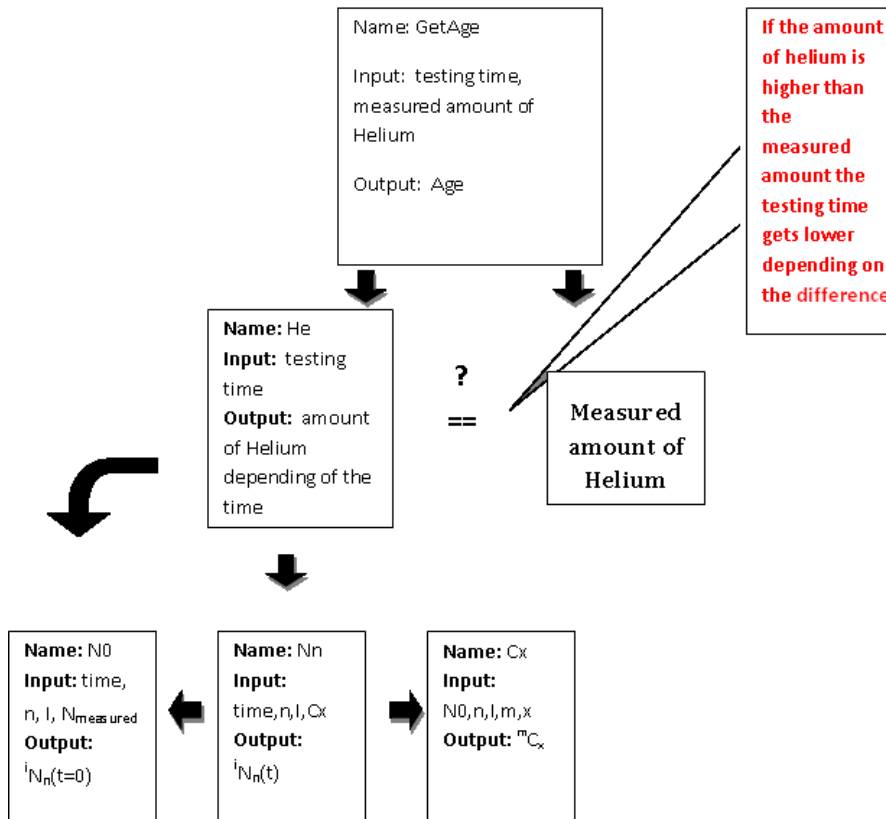


Figure 5: Schema des Programms zur Altersbestimmung aus der He-Konzentration. Das Programm wurde in fünf Funktionen aufgeteilt. n beschreibt die Position des Elements in der Zerfallskette, i in welcher der drei natürlichen Zerfallsketten es vorkommt. Durch diese beiden Zahlen ist das Element also eindeutig identifiziert. Die Rechnungen für N_n und He sind oben nachzulesen, ebenso für N_0 . Zur Berechnung von N_0 wurde N_n etwas modifiziert, aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde diese Funktion (N_{n0} siehe Fußnote 3) hier nicht dargestellt. Die testing time ist die Zeit, welche am Anfang als Zeitschätzung gewählt wird. (Es ist nicht nötig, eine möglichst gute Zeitschätzung zu wählen, da davon nur die Rechenzeit abhängt, nicht jedoch die Genauigkeit). Diese geschätzte Zeit wird solange variiert, bis die daraus resultierende Helium-Menge mit der gemessenen Helium-Menge übereinstimmt.

3 Säkulares Gleichgewicht

Als säkulares Gleichgewicht oder radioaktives Zerfalls-Gleichgewicht wird der Zustand bezeichnet, wenn sich die Menge an Zerfällen des Elternnuklids dem des Tochternuklids angleichen, bzw der Quotient der beiden Zerfallsfunktionen konstant wird. Dies wird mathematisch beschrieben als:

$$\lambda_1 N_1(t) = \lambda_2 N_2(t) \quad (3)$$

Ihren Ursprung hat (2) darin, dass sich die Ableitungen der Zerfallsfunktionen annähern, also:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = \frac{dN_2(t)}{dt}$$

Dieser Zustand tritt allerdings nur auf, wenn die Halbwertszeit des Elternnuklids deutlich größer als die des Tochternuklids ist. Radioaktives Gleichgewicht tritt nach circa.10 Halbwertszeiten des zweiten Elementes ein.

In Abbildung 6 ist die Stoffmenge zweier radioaktiver Elemente visualisiert, welche sich nach einiger Zeit im Gleichgewicht befinden. Dies ist graphisch sichtbar, wenn die Kurven parallel verlaufen. In der Abbildung 7 ist der Verlauf zweier Elemente dargestellt, die nie ins Gleichgewicht kommen, da die Halbwertszeit des zweiten Elementes höher als die des ersten Elementes ist. Desweiteren ist in Abbildung 8 der Fall zu sehen, dass die Halbwertszeit des zweiten Elementes zwar größer ist, allerdings nicht genug, um den Quotient aus der Stoffmenge des ersten und des zweiten Elements als konstant anzusehen. Ist eine Zerfallsreihe von Anfang an im radioaktiven Gleichgewicht, kann das Alter auch folgendermaßen berechnet werden. FARLEY (2002) [7]

$${}^4He = 8{}^{238}U\lambda_{238} + 7{}^{235}U\lambda_{235} + 6{}^{232}Th\lambda_{232} = P * t,$$

wobei P die Produktionsrate ist und die Einheiten der Element-Mengen und 4He sich entsprechen müssen (z.B.in Anzahl der Atome). die Zahlen 8 beziehungsweise 7, 6 stehen für die Anzahl an α -Zerfällen, die dem Zerfall des jeweiligen Elementes folgen, da dies die entstehende Menge an Helium hervorruft.

Durch die Annahme von säkularem Gleichgewicht kann ein Fehler entstehen, dessen Größe von den tatsächlichen Anfangsbedingungen und dem Alter abhängt. Dieser Fehler wird relativ gesehen mit zunehmenden Alter immer kleiner. Er ist jedoch wesentlich (unter bestimmten Umständen nicht vernachlässigbar), auch wenn bereits Gleichgewicht erreicht wurde. Dies führt dazu, dass bei Annahme von radioaktiven Zerfalls-Gleichgewicht ein deutlich jüngeres Alter errechnet wird.

Der aus der vereinfachenden Annahme von säkularem Gleichgewicht resultierende Fehler wird in Abbildung 10 visualisiert. Dargestellt wird sowohl die relative Abweichung (grüner Graph) wie auch die Differenz in Jahren (roter Graph).

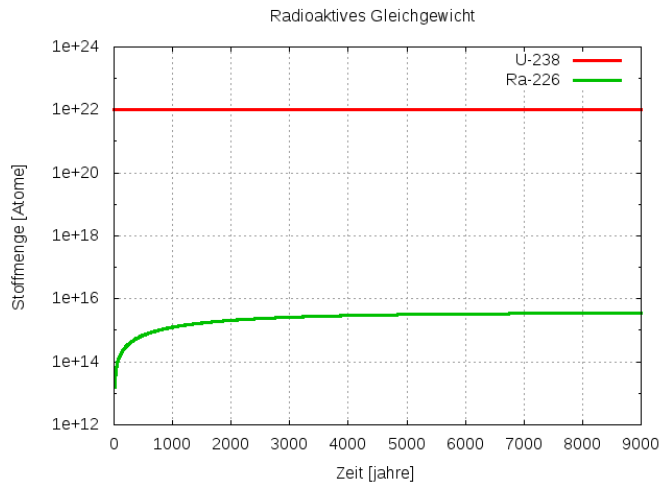


Figure 6: Zwei Elemente, die nach einiger Zeit ($t=7000$ Jahre) radioaktives Zerfalls-Gleichgewicht erreichen. Halbwertszeit des ersten Elementes (^{238}U , wird durch die rote Kurve visualisiert) ist: $4.468 \cdot 10^9$ Jahre. Halbwertszeit des zweiten Elementes (Radium, wird durch die grüne Kurve visualisiert) ist: 1602 Jahre. Die Anfangsmenge des ersten Elementes beträgt: 10^{22} Atome, das zweite Element hat keine Anfangs-Stoffmenge.

Die relative Abweichung A_{rel} wurde wie folgt berechnet:

$$\frac{A - B}{A} * 100 = A_{rel}$$

wobei A das Alter ist, welches mit der Gleichgewichtsannahme berechnet wurde und B das Alter, welches exakt, unter Berücksichtigung des initialen Ungleichgewichts und der Anfangskonzentration der Elemente, berechnet wurde. Die Annahme von Gleichgewicht führt also, auch nach dem Erreichen von Gleichgewicht zu einem Fehler. Diese Abweichungen pflanzen sich noch eine viel längere Zeit fort. Der Grund hierfür ist, dass bei der Berechnung mit der Gleichgewichts-Annahme davon ausgegangen wird, dass die Stoffmenge, die beim ersten Zerfallskettenglied zerfällt gleichzeitig auch beim zweiten, dritten... Element zerfällt. Es gibt also keine Verzögerungen durch die Elementlebensdauern.

Befindet sich das System zum Zeitpunkt t_m im Gleichgewicht (in der Abbildung 10 ist dies der Fall, wenn die absolute Zeitdifferenz nicht mehr wächst, also $t_m \sim 10^7$ Jahre), sind die Verzögerungen ab der Zeit t_m nicht mehr ausschlaggebend. Allerdings spielen die Verzögerungen bis zu eben diesem Zeitpunkt immer noch eine Rolle, da die Zeitdifferenz zwischen exakter Berechnung und vereinfachter Gleichgewichtsannahme, die sich bis zu diesem Zeitpunkt aufgebaut hat, immer noch vorhanden ist. Diese Abweichungen können unter Umständen auch nach dem Erreichen des Gleichgewichts nicht vernachlässigt werden. Die Abweichungen zu einer Berechnung unter Gleichgewichtsannahme hängen stark von den Anfangs-

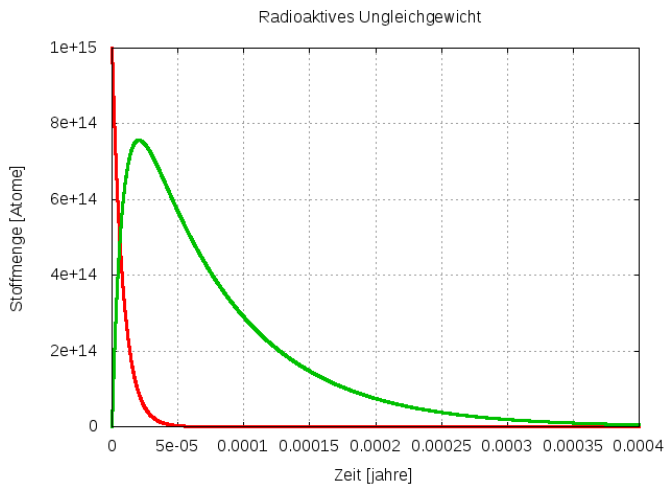


Figure 7: Zwei Elemente, die kein Gleichgewicht erreichen können aufgrund der größeren Halbwertszeit des zweiten Elementes. Halbwertszeit von ^{218}Po : 3.05 min, Halbwertszeit von ^{214}Pb : 26.8 min.

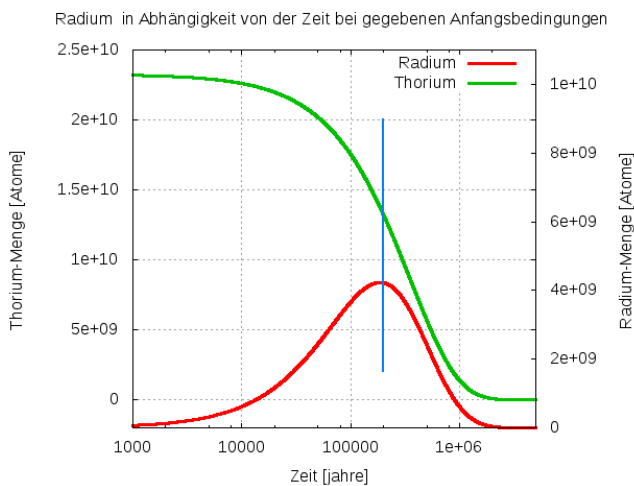


Figure 8: Es wird ein Gleichgewicht erreicht (Ab der blauen Gerade). Aufgrund des, im Vergleich zu den betrachteten Zeiten, geringen Unterschiedes der beiden Halbwertszeiten (Thorium:75380 Jahre, Radium:1602 Jahre) kommt es jedoch nicht zu einer konstanten Phase des zweiten (roten) Elementes.

bedingungen ab. Sie werden größer, wenn langlebige Elemente wie ^{234}U keine Anfangsmenge hatten (nach Millionen Jahren 30% Abweichung, mit den Anfangsbedingungen: $^{238}\text{U} = 8.9 * 10^{17}$, $^{232}\text{Th} = 3.34 * 10^{12}$) und kleiner, wenn von den langlebigen Elementen eine Anfangsmenge vorhanden war (10% nach Millionen Jahren Abweichung, mit den Anfangsbedingungen: $^{238}\text{U} = 8.9 * 10^{17}$, $^{232}\text{Th} = 3.34 * 10^{12}$, $^{234}\text{U} = 1.5 * 8.9 * 10^{17}$) (siehe Anhang 7.2).

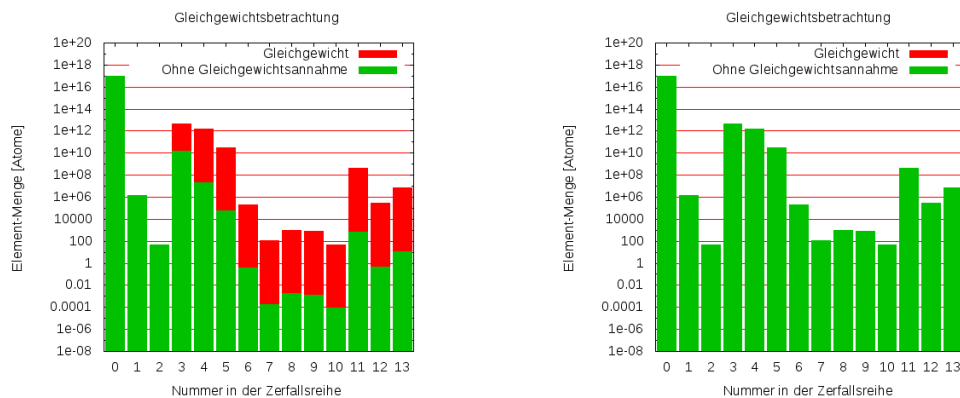


Figure 9: Es werden die Mengen der verschiedenen Elemente der ersten Zerfallsreihe dargestellt. Hierbei ist rot markiert, wie die theoretische Menge aussehen müsste, wenn sich das System im Gleichgewicht befindet. Dies wurde nach der Formel 3 berechnet. In grün ist die, durch die differentielle Methode berechnete Menge in Abhängigkeit von der Zeit zu dargestellt. Links ist das System nach 1000 Jahren zu sehen. Man kann deutlich sehen (durch den hohen Anteil an roten Balken), dass sich das System noch nicht im Gleichgewicht befindet. Rechts ist das System nach 10^6 Jahren zu sehen, welches sich im Gleichgewicht befindet.

Aus der Gleichgewichtsannahme resultierende Abweichungen als Funktion der Zeit

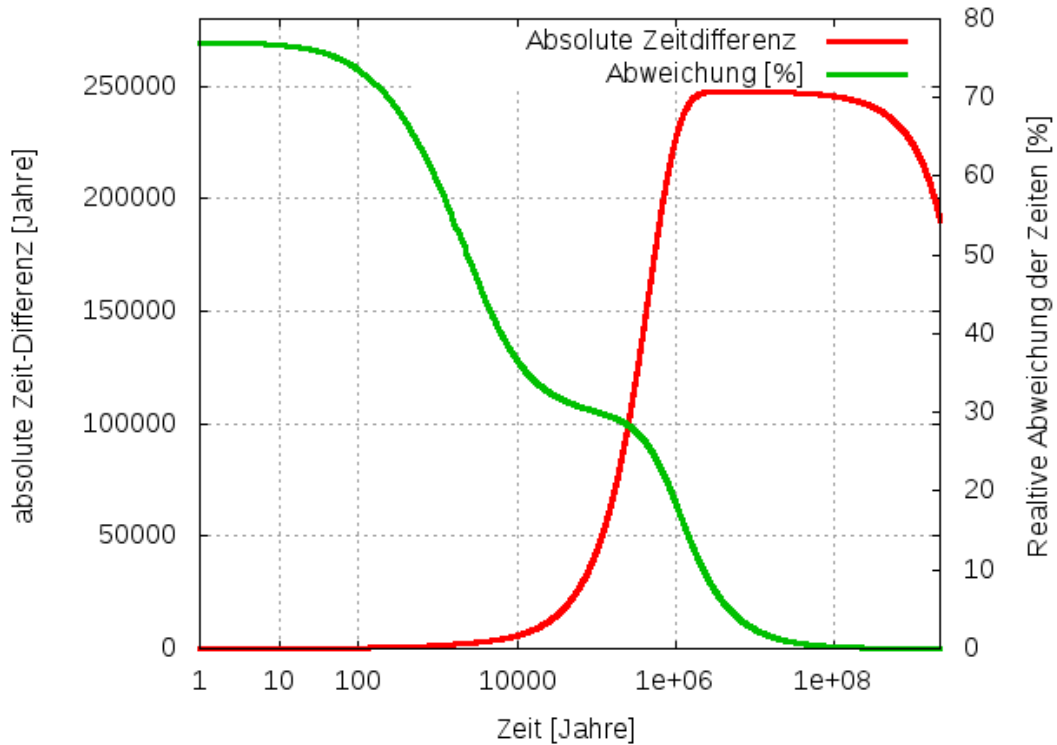


Figure 10: Es wird die Abweichung zwischen der Berechnung mit Hilfe der Gleichgewichtsannahme und der differentiellen Methode dargestellt. Für die Anfangsbedingungen (siehe 1). Der prozentuale Fehler sinkt monoton bis er bei ca. 24480000 Jahren auf unter ein Prozent geht. Der absolute Fehler fällt erst bei deutlich höherem Alter ab, die Verzögerung im Abfall des prozentualen Fehlers wird durch Radium (Halbwertszeit 1062 Jahre) hervorgerufen. Die Gleichgewichtsannahme geht davon aus, dass alles, was im ersten Element zerfallen ist, instantan auch in allen anderen Elementen zerfällt, somit führen insbesondere große Verzögerungen zu Abweichungen. Die totale Differenz sinkt erst nach ca. 10^7 Jahren. Dies entspricht in etwa der Summe der Halbwertszeiten, die auf die ersten Elemente der Zerfallsreihen folgen. Für andere Anfangsbedingungen variiert die Größe des Fehlers.

4 Diskrete Analyse des Zerfalls

Um die oben beschriebene Rechnung 2 zu verifizieren, wurde ein Programm implementiert, welches den Zerfall als einen diskreten Prozess behandelt, d.h. es wird mit kleinen Zeitintervallen gerechnet (siehe Kapitel 4). Für $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ sollten diese Gleichungen gegen die tatsächlichen Zerfallsfunktionen konvergieren.

Die Abweichungen der Zerfallsfunktionen von der diskreten zu der differentiellen

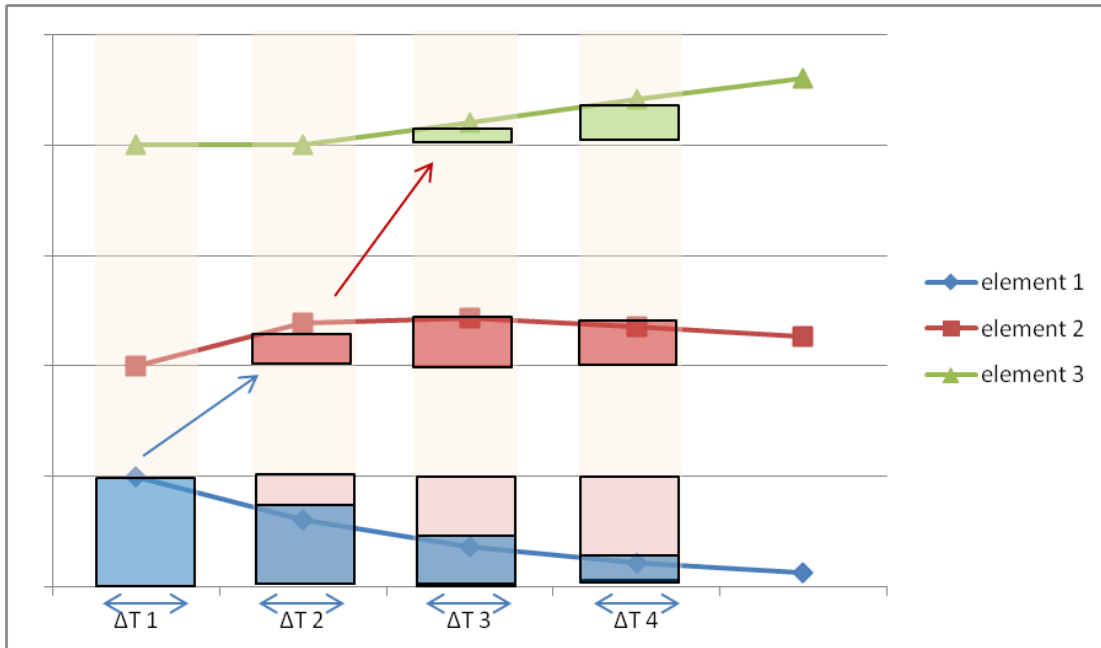


Figure 11: Die Idee der diskreten Betrachtung wurde am Beispiel von einer Zerfallsreihe mit drei Zerfallskettengliedern dargestellt. Die farbigen Linien zeigen den kontinuierlichen Verlauf an, während die ausgefüllten Kästen die Annäherung durch das diskrete Verfahren darstellen. Die einzelnen Zeitintervalle wurden farblich hinterlegt. Es ist zu sehen, dass der Zerfall des ersten Elementes im zweiten Zeitschritt (ΔT_2) eine Menge des zweiten Elementes hervorruft und im dritten Zeitschritt (ΔT_3) eine Menge des dritten Elementes. Für das n -te Element gilt also, dass erst nach n Zeitschritten der Zerfall des ersten Elementes bemerkbar wird.

Methode sind primär abhängig von der Halbwertszeit und dem den gewählten Zeitschritten. Dabei spielt die Stelle, an der das Element in der Zerfallsreihe steht, eher eine sekundäre Rolle. Die Abweichungen konvergieren nach anfänglichen Schwankungen gegen einen konstanten Wert der sich über die Zeit kaum verändert und stark von der Halbwertszeit abhängt. Lediglich beim ersten Element kommt es zu einer konstanten Änderung der Abweichung, die allerdings sehr gering ist.

Werden die beiden Berechnungsweisen miteinander verglichen, erhält man eine relative Abweichung von ca. $\frac{10^{-12}}{10000\text{Rechenschritte}}$. Diese Abweichung kann auf Rundungsfehler zurückgeführt werden.

Die Gründe der Abweichungen der diskreten Methode wurden von Tabelle 2 aufgezählt und analysiert. Um gute Ergebnisse zu erzielen, muss ein Mittelwert zwischen zu großen und zu kleinen Zeitintervallen gefunden werden, um die Rundungsfehler zu minimieren.

1	Rundungsfehler	Abhängig von der Anzahl der Rechenschritte, Größenordnung: $\frac{10^{-12}}{10000\text{Rechenschritte}}$. Dieser Fehler ist klein, im Vergleich zu den anderen
2	Abweichungen aufgrund von zu großen Zeit-Intervallen	Die Elemente mit Halbwertszeiten $<$ Zeitintervall können nicht richtig berechnet werden \rightarrow die Helium Menge wird falsch berechnet. Bei einem Zeitintervall von 10 Jahren ist die relative Abweichung der Helium-Menge nach 100000 Jahren bei ca. 36%. Bei größeren Zeiten sinkt die Abweichung etwas.
3	Abweichungen aufgrund von zu kleinen Zeit-Intervallen	Bei den Rechnungen für die Elemente mit Halbwertszeiten \gg Zeitintervall werden aufgrund der sehr kleinen Zahlen (die entstehenden Mengen nach so kurzen Halbwertszeiten sind sehr klein) schlecht gerundet, d.h. die Abweichung wird größer (siehe Abbildung 12).

Table 4: Fehlerquellen, die zu Abweichungen zwischen der Berechnung mittels der diskreten und der differentiellen Methode führen.

Die minimalen Abweichungen beider Berechnungsmethoden unterscheiden sich also für die Zerfallsfunktion jedes Elementes. Sie wurden in Abbildung 13 als Funktion der Halbwertszeiten und der Zeitintervalle dargestellt. Es wird deutlich, dass die Funktion nach oben und nach unten beschränkt ist. Die obere Beschränkung ist auf die Wahl zu großer Zeitintervalle und die daraus resultierende Ungenauigkeit zurückzuführen. Die untere Beschränkung dagegen entsteht aufgrund der Menge an Rechenschritten und des somit relativ großen Rundungsfehlers (siehe Tabelle 4).

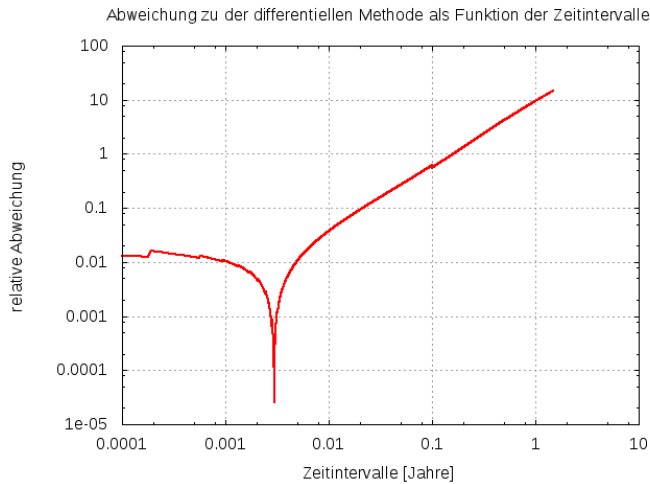


Figure 12: Es wurde die Abhängigkeit der Abweichungen des zweiten Elementes einer Zerfallskette dargestellt. Die Halbwertszeit beträgt 24.1 Tage. Deutlich ist zu sehen, dass die Abweichungen mit steigendem Zeitintervall immer größer werden und auch bei sehr kleinen Intervallen wieder anwachsen. Die Minima aller dieser Funktionen sind in Abbildung 13 zu sehen, die Abhängigkeit von den Halbwertszeiten ist deutlich erkennbar!

In Abbildung 14 wurden sowohl die absoluten wie auch die relativen Abweichungen A_{rel} visualisiert. Die relativen Abweichungen berechnen sich durch:

$$\frac{A - m * \Delta T}{A} * 100 = A_{rel}$$

wobei m die Anzahl der Rechenschritte bezeichnet. Somit gibt $m * \Delta T$ die Zeit an. A stellt das Alter dar, welches durch die differentielle Methode ermittelt wurde. Die Abweichungen sind bei einem Zeitintervall von 0.1 Jahren kleiner als 0.025%. Die diskrete Methode konvergiert also gegen die Differentielle.

³Genau wurde dies in dieser Arbeit nicht analysiert, es wurden nur Stichproben bei Zeitintervallen von 0.01, 0.001, 1, 10 Jahren gemacht, diese sind im Anhang zu finden 25.

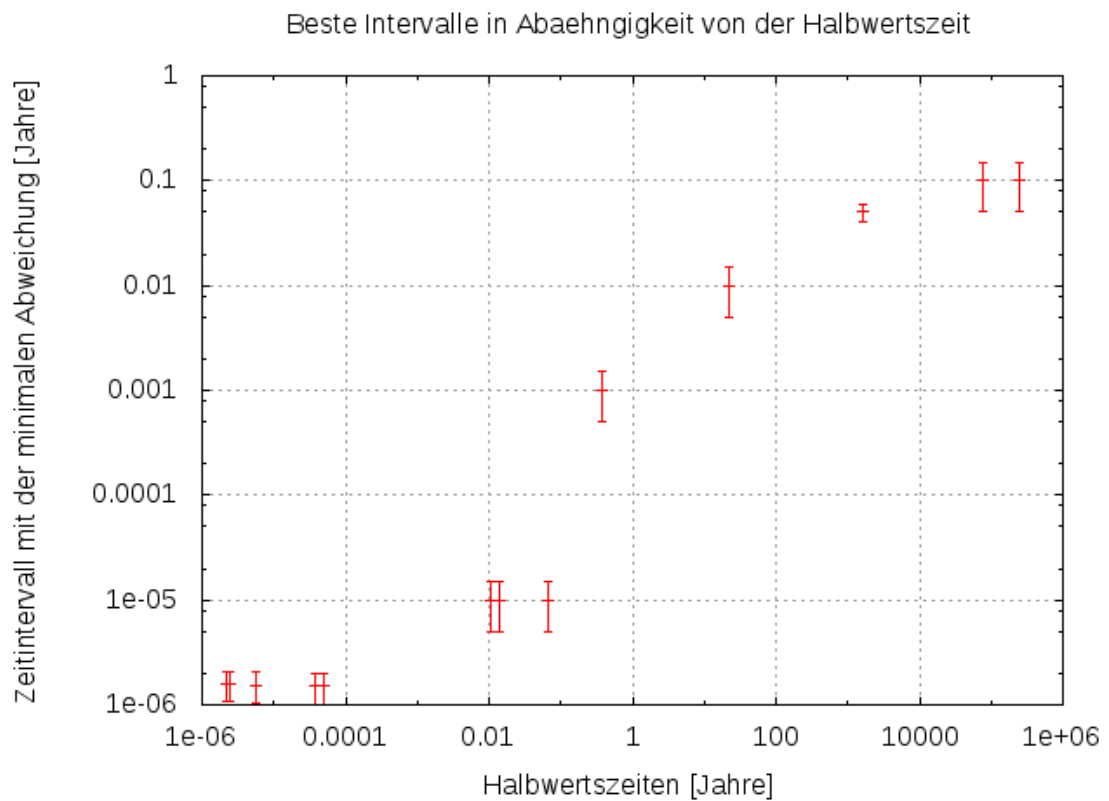


Figure 13: Die Abhängigkeit der minimalen Abweichungen der differentiellen zu der diskreten Methode von der Halbwertszeit und den gewählten Zeitschritten wird dargestellt. Es ist zu sehen, dass es sich um eine doppelt beschränkte Funktion handelt. Es muss also, um die bestmöglichen Ergebnisse zu erzielen ein Zeitintervall gewählt werden, welches zwischen 0.000001 und 0.1 Jahren liegt.

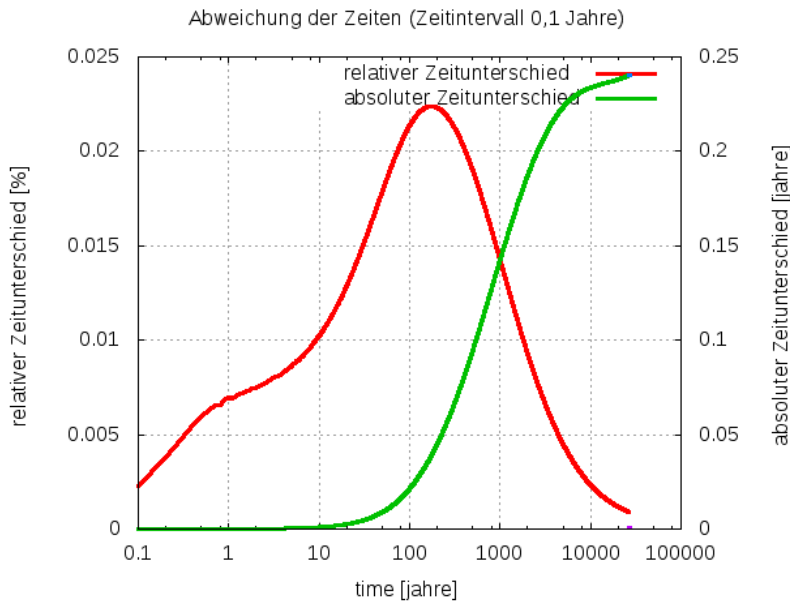


Figure 14: Zu sehen ist die Abweichung der diskreten Methode zu der differentiellen als Funktion der Zeit. Der Graph wurde bei folgenden Anfangsbedingungen gemacht: $^{238}\text{U}_{initial} = 2.75 \cdot 10^{14} + 14\text{Atome}$; $^{234}\text{U}_{initial} = 2.33 \cdot 10^{10}\text{Atome}$; $^{230}\text{Th}_{initial} = 8.25 \cdot 10^9\text{Atome}$; Der prozentuale Fehler hat ein Maximum bei ca. 200 Jahren hat. Für kleinere Zeitintervalle verschiebt sich der maximale relative Fehler nach rechts und für größer Zeitintervalle nach links. Die Größe der Fehler der relativen wie auch der absoluten, variiert für die verschiedenen Zeitintervalle. Er wird jedoch sowohl für größere wie auch für kleinere Zeitintervalle größer.(siehe Anhang 7.5.2)

5 Ergebnisse

In Tabelle 5 wurden Daten aus der Bunker Höhle im Sauerland, der Wilder-
mann Höhle in Österreich und der Bären Höhle (bear cave) in Kanada ausgew-
ertet(Siehe 7.3). Die Alter, die durch die differenzielle Helium-Altersdatierung
gewonnen wurden, wurden mit denen aus der Uran/Thorium-Methode und der
Gleichgewichtsmethode verglichen. Die relative Abweichung wurde berechnet durch:

$$\frac{He.Alter - A}{He.Alter} = A_{rel}$$

gemeint mit A ist entweder das mit Hilfe der Gleichgewichtsannahme berechnete
Alter oder das Alter, welches durch die Uran/Thorium-Methode (bzw Uran/Blei-
und andere Methoden) ermittelt wurde.

³Die Alter der letzten beiden Proben (WM1 und BC14) wurden durch die Uran-Blei Methode
(beziehungsweise andere Datierungsmethoden) errechnet

Name	Helium- Alter	He- Gl.gew.- Alter	rel.Abw Gl.gew./He Alter	Uran/Th- Alter	rel.Abw Uran/Th
BUU_3	6290.84	903.684	0.856349	11000	0.748573
Cotube_Bu	9382.05	1402.15	0.850549	11700-10800	0.76-0.15
BUU_2	9465.65	1415.63	0.850446	10800	0.140968
BUU4	12003.3	1853.88	0.845552	12000-10000	0.0003-0.167
BUU_5	14215.4	2257.16	0.841218	11500	0.191021
BU1_49	19816.8	3364.3	0.83023	8000	0.596303
StrwII	20860.5	3596	0.827617	-	-
BU1	23515.2	4176.3	0.8224	1300	0.94
Soda	31806.9	6121.62	0.807538	11700-10800	0.48-0.66
BU	32295.1	6244.46	0.806644	11700-10800	0.48-0.67
Cotube_Bu2	39397.5	8119.54	0.793907	11700-10800	0.58-0.73
Bu4	41856.1	8805.92	0.789614	11700-10800	0.61-0.74
BUU_6	46274.3	10082.4	0.782117	12000	0.74
BU1_51	48144.9	10643.4	0.77893	8000	0.833835
Bu3	58188.5	13817.8	0.762533	11700-10800	0.72-0.81
BUU_9	64668.3	16001.7	0.752558	54000	0.164969
BU1_55	78609.8	21063.2	0.732054	8500	0.891871
Bu1	84689.7	23419.7	0.723464	11700-10800	0.80-0.87
BU1_46	85741.8	23837.2	0.721988	7500	0.912528
BUU11	92003.9	26339.5	0.713713	12000-10000	0.87-0.89
BU2	137309	46677.4	0.660055	51000	0.628574
BUU_15	105291	31917	0.696869	132000	0.253667
BU1_29	112825	35282.4	0.687282	5000	0.955684
BUU_14	113462	35512	0.687015	130000	0.145754
BUU_12	145930	50854.8	0.651513	128000	0.122867
BUU10	148284	52022.4	0.64917	12000-10000	0.92-0.93
BU1_22	159341	57679.9	0.63801	5000	0.968621
BUU8	166682	61406.6	0.631594	54000	0.676029
BUU13	217956	89423	0.589719	129000	0.408136
Spa12	231.376	31.2894	0.864768	-	-
Spa52b	8146.61	1194.63	0.853358	-	-
WM1	43857.5	9359.31	0.786597	2.2e+06	49.1625
BCI4	3.3e+06	2.9e+06	0.118856	(2-5)e+06	0- 0.51

Table 5: Daten aus der Bunker Höhle im Sauerland, der Wildermann Höhle in Österreich und der Bären Höhle (bear cave) in Kanada wurden mit Hilfe der differentiellen Methode ausgewertet. Zum Vergleich sind die Alter, welche mit der Gleichgewichtsmethode bestimmt wurden, und Alter, die unabhängig durch die Uran/Thorium-Datierung ermittelt wurden, zu sehen. Das Aktivitätsverhältniss $U_{234}/U_{238} = 1.5$, für die Werte von Th 232 U238: Siehe Anhang 7.3.

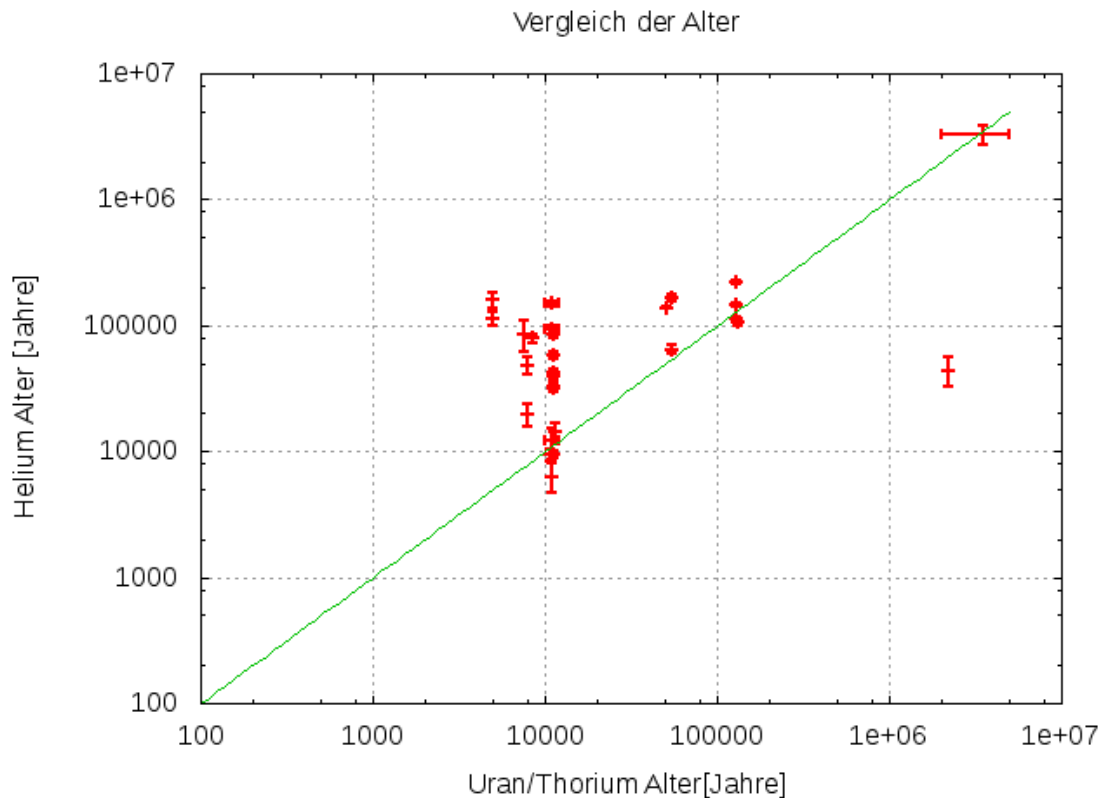


Figure 15: Die Ergebnisse aus Tabelle 5 wurden hier visualisiert, die grüne Linie zeigt an, wo sich die Alter entsprechen. Für die Fehler auf das Helium-Alter siehe 5.1, Es kann erkannt werden, dass die Alter, welche durch die Helium-Methode berechnet werden meist größer sind als solche, welche durch die Uran/Thorium Methode bestimmt wurden.

Es ist zu erkennen, dass die Alter, welche durch die Helium-Datierungsmethode berechnet wurden im Mittel deutlich höher sind, als die durch die Gleichgewichtsmethode oder die Uran/Thorium berechneten Alter. Der Grund dafür, dass die Alter, welche durch die Gleichgewichtsmethode berechnet wurden meist viel zu klein waren lag demzufolge nicht an der Methode der Helium-Altersdatierung. Die Berechnung und die falschen Annahme von radioaktivem Zerfallsgleichgewicht führen zu diesem Fehler. Nur wenn das Alter korrekt, d.h ohne die Annahme von säkularem Gleichgewicht berechnet wird, kann ein glaubwürdiges Alter errechnet werden. Wie auch in Abbildung 10 deutlich wird, zieht sich der Fehler, der durch die Annahme von säkularem Gleichgewicht entsteht, nicht nur bis eben dieses Gleichgewicht erreicht wird, sondern noch deutlich länger. Nach Millionen Jahren, einer Zeit bei dem sich die Zerfallskette längst im Gleichgewicht befinden sollte, ist immer noch eine Abweichung des Alters von über 20% zu sehen. Diese

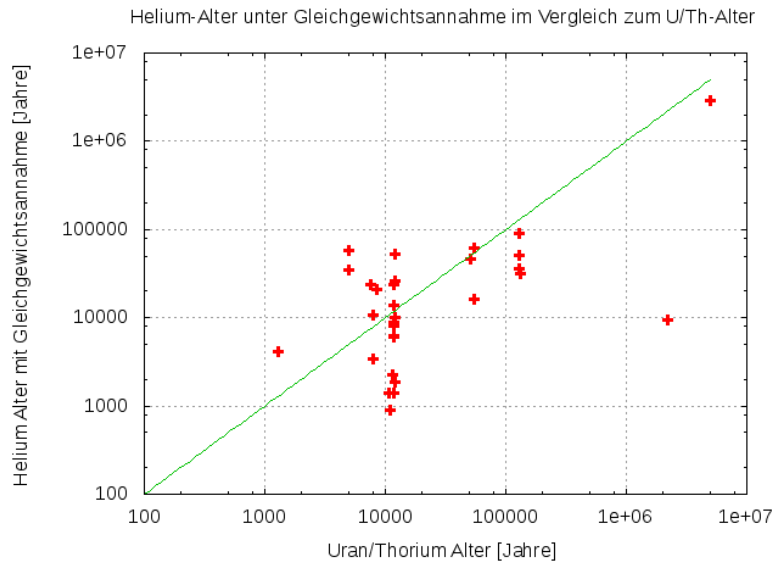


Figure 16: Das Helium-Alter unter Gleichgewichtsannahme wurde mit dem U/Th-Alter verglichen, die Ergebnisse sind in Tabelle 5 dargestellt.

Abweichungen entstehen aus den Verzögerungen auf Grund der Halbwertszeiten. Da die genauen Anfangsbedingungen nicht mehr ermittelt werden können, muss man von den jetzigen Bedingungen zurückschließen. Dies wurde für ^{234}U genauer untersucht: In Tabelle 6 wird das Aktivitätsverhältnis A $\left[\frac{^{234}\text{U}}{^{238}\text{U}}\right]$ bei dem Anfang der Zählung für drei Beispiele aus Tabelle 3 variiert. Das Aktivitätsverhältnis der Anfangsbedingungen ist definiert durch:

$$\frac{\lambda_{234}\text{U} * N_{234}^0}{\lambda_{238}\text{U} * N_{238}^0} = A$$

Die Ergebnisse dazu wurde in Abbildung 17 visualisiert.

$\left[\frac{^{234}\text{U}}{^{238}\text{U}}\right]$	Name	Alter[Jahre]	Alter[Jahre]	rel.Abw
		He-Datierung	Uran/Thorium zw. He-& U/Th-Datierung	
0	BU1_22	369570	5000	0.9864
	Bu1	219477	11700-10800	0.9466-0.95079
	BUU_12	344907	128000	0.628885
	WM1	121527	2.2e+06	12.3555
1	BU1_22	196597	5000	0.974567
	Bu1	104223	11700-10800	0.841685-0.896376
	BUU_12	180049	128000	0.289083
	WM1	53908.5	2.2e+06	39.8099
1.5	BU1_22	159341	5000	0.968621
	Bu1	84689.7	11700-10800	0.80-0.87
	BUU_12	145930	128000	0.122867
	WM1	43857.5	2.2e+06	49.1625
2	BU1_22	135275	5000	0.963038
	Bu1	72223.8	11700	0.771543
	BUU_12	123980	128000	0.032427
	WM1	37396.4	2.2e+06	57.8291
3	BU1_22	106001	5000	0.952831
	Bu1	56940	11700	0.710221
	BUU_12	97276.8	128000	0.315833
	WM1	29376.3	2.2e+06	73.8903
4	BU1_22	88621	5000	0.94358
	Bu1	47711	11700	0.654168
	BUU_12	81388.7	128000	0.5727
	WM1	24471.7	2.2e+06	88.8999
5	BU1_22	76935	5000	0.93501
	Bu1	41416.7	11700	0.60161
	BUU_12	70681.9	128000	0.810931
	WM1	21102.1	2.2e+06	103.255

Table 6: Das, aus der differentiellen Methode berechnete Helium-Alter wird in Abhängigkeit von dem Aktivitätsverhältnis dargestellt. Zum Vergleich sind die Uran/Thorium Alter zu sehen. Die entsprechenden Daten sind im Anhang zu finden 7.3.

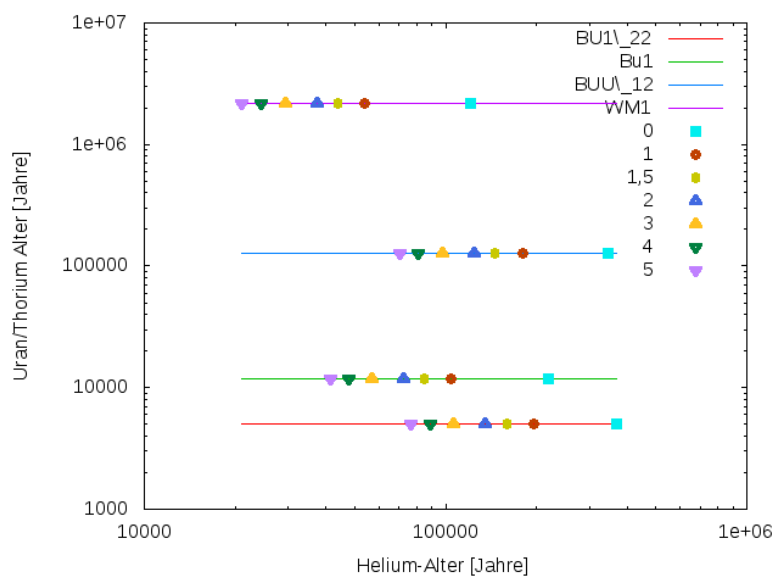


Figure 17: Es wurden die Werte aus Tabelle 6 visualisiert. Es ist zu sehen, dass die Variation des ^{234}U einen großen Einfluss auf die über Helium berechnete Zeit hat.

5.1 Fehlerdiskussion

Es gibt verschiedene Fehlerquellen, welche unter Umständen unsere Berechnungen stark verfälschen können. Messfehler, Rundungsfehler und die Fehler, die entstehen wenn sekuläres Gleichgewicht eingetreten ist und man eventuelle Anfangskonzentrationen nicht mehr messen kann.

Die Zeit, nach der der letztgenannte Fehler wichtig wird, lässt sich durch folgende Gleichung bestimmen.

$$N_0 * e^{-\lambda t} < 10^{-3} * N(t)$$

Man geht davon aus, dass die relevanten Elementkonzentrationen mit einer Genauigkeit von 0.1 % gemessener werden können.

Damit folgt:

$$t_0 = \frac{\ln(10^{-3} * N(t)/N_0)}{\lambda}$$

Ab dieser Zeit kann nicht mehr ermittelt werden, ob es eine Anfangs-Stoffmenge gab oder nicht. Beispielsweise kann eine Radium Anfangs-Stoffmenge von 10^{19} Atomen nach 16020 Jahren nicht mehr nachgewiesen werden. Der hieraus resultierende Fehler kann unter Umständen sehr groß werden. Es muss dann versucht werden, die Wahrscheinlichkeit einzuschätzen, mit der eine Anfangsmenge da gewesen sein könnte.

Dieser Effekt führt zu eine Überschätzung des He-Alters. Aufgrund der im Vergleich zu Uran, kurzen Halbwertszeit von Radium ist der kritische Zeitpunkt relativ klein. Die Abweichungen, die dieser Effekt auf die Berechnung des Alters hätte, ist in Abbildung 19 dargestellt. Deutlich wird, dass man eine mögliche Anfangsmenge von verschiedenen Elementen zunehmend schlechter nach oben abschätzen kann. Allerdings muss hier auch beachtet werden, wie wahrscheinlich eine ausschlaggebende Anfangsmenge ist. Bei Elementen mit sehr kurzen Halbwertszeiten (z.B. ^{234}Pa) ist eine erhebliche Anfangsmenge sehr unwahrscheinlich, da sie aufgrund der kurzen Halbwertszeit schon zerfallen ist, wenn die Alterszählung beginnt. Das aus dem Zerfall der Elemente mit kurzen Halbwertszeiten resultierende Helium verfliegt also, bevor das Mineral sich bildet. Besonders Radium kann hier Probleme in der Zeitmessung mit sich bringen, da, die Halbwertszeit zwar nicht sehr klein ist, so dass eine Anfangsmenge unwahrscheinlich ist, aber auch nicht so groß, dass man Anfangsmengen auch nach längerer Zeit nachweisen kann.

Die Messfehler lassen sich wie folgt berechnen:

Der Fehler $\Delta^a T$, welcher aus der Messungenauigkeit des Heliums stammt wurden wie folgt berechnet:

$$\Delta^a T = \text{Alter}(\text{Helium}) - \text{Alter}(\text{Helium} + \Delta \text{Helium})$$

Anzahl radioaktiver Kerne als Funktion der Zeit

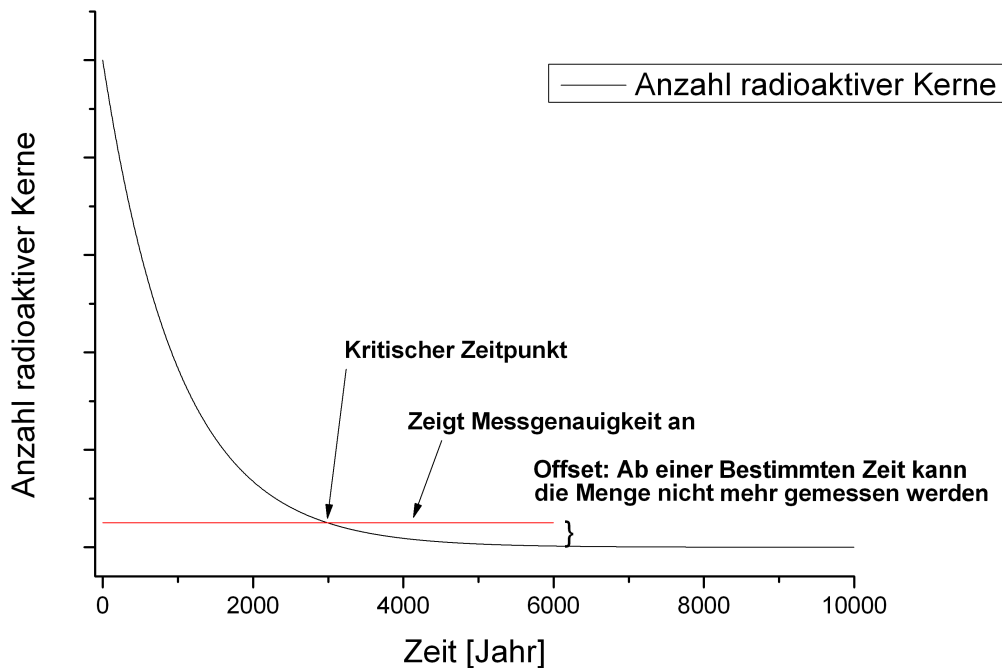


Figure 18: Es wird deutlich, dass nach dem kritischen Zeitpunkt die Anfangsmenge so weit zerfallen ist, dass sie im Vergleich zum Messfehler nicht mehr ermittelt werden kann.

Allerdings muss bei dem Messfehler des Heliums mit eingerechnet werden, um was für ein Material es sich handelt, d.h. man muss eruieren, ob sich Helium verflüchtigen konnte und wenn ja wie viel. Aufgrund der hohen Flüchtigkeit von Helium sind nicht alle Materialien dazu geeignet durch die Helium-Altersdatierung untersucht zu werden. Die große Flüchtigkeit kommt davon, dass Helium das zweitleichteste Element ist, und dass der α -Zerfall das Kristallgitter schädigen kann und somit Pfade für den Verlust schafft. Des Weiteren kann es sein, dass das α -Teilchen durch den Rückstoß aus dem Kristall entweicht.

Der Fehler $\Delta^b T$, welcher aus der Messungenauigkeit der Stoffmengen E_n der radioaktiven Elemente kommt, wurde berechnet als:

$$\Delta^b T = \text{Alter}\left(\sum_n E_n\right) - \text{Alter}\left(\sum_n E_n + \Delta E_n\right)$$

$$\Rightarrow \Delta T = \sqrt{\Delta^a T^2 + \Delta^b T^2}$$

Wird die Stoff-Menge einiger Elemente nicht gemessen, muss die Annahme gemacht

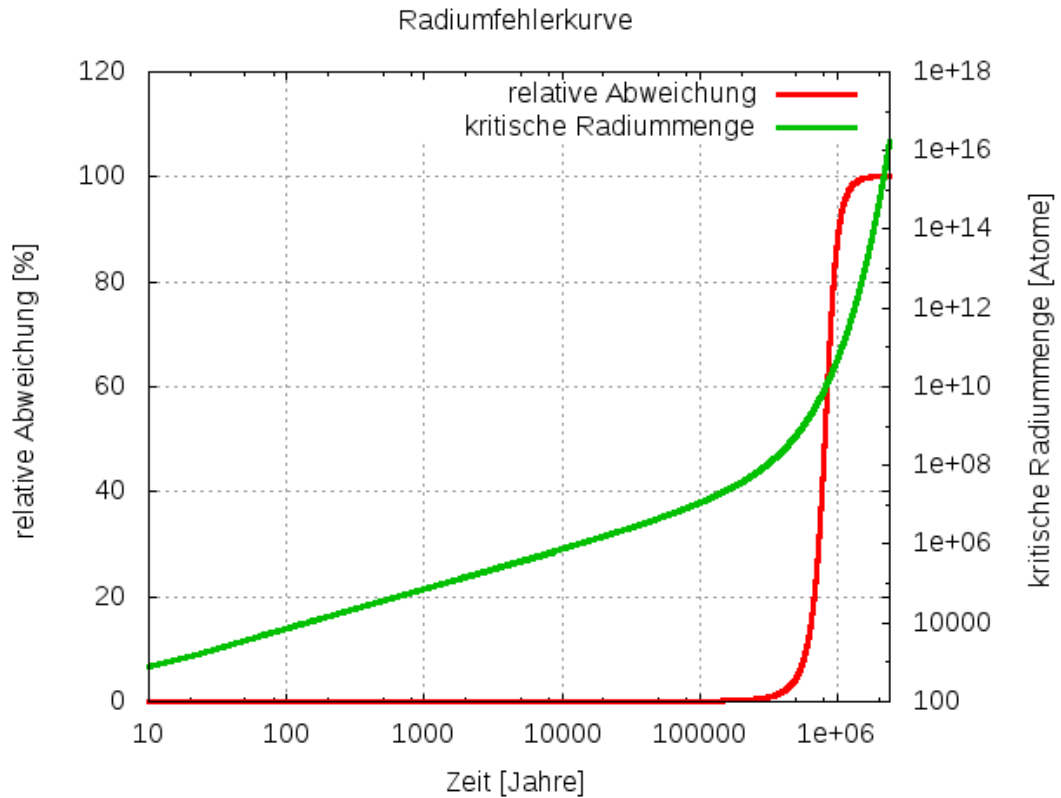


Figure 19: Anfangsbedingungen: Helium-Menge: $^{238}\text{U}=2.7526610^{14}$, $^{232}\text{Th}=2.586610^{10}$, $^{234}\text{U}=1.1639210^{12}$, Es wird die kritische Anfangsmenge von Radium, also die Menge, welche in Abhängigkeit von der Zeit nicht mehr nachgewiesen werden kann, dargestellt (grüner Graph). Anfangsmengen deren Werte unterhalb der Kurve liegen sind nicht mehr Nachweisbar. Der rote Graph gibt die relative Abweichung in % an, diese wird durch $\frac{t_1-t_2}{t_1}$ berechnet wobei t_1 das Alter ohne eine Anfangsmenge von Radium angibt und t_2 das Alter mit einer Anfangsmenge von Radium.

werden, dass die Anfangsmenge Null ist oder einen gesteins- und formationstypischen Wert annimmt. Dies kann ebenfalls zu einem Fehler führen, (siehe Diskussion über Radium).

Der Rundungsfehler durch das Programm kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden, nur bei sehr kleinen oder so großen Zeiten kann er größer werden.

Der Fehler aufgrund der numerischen Berechnung kann vernachlässigt werden, da die Genauigkeit nur durch die Rechenzeit beschränkt wird und schon bei sehr kurzer Rechenzeit (Sekunden) eine Genauigkeit von besser als $10^{-5}\%$ erreicht wird.

6 Fazit

Abschließend lässt sich sagen, dass die Annahme von radioaktiven Zerfalls-Gleichgewicht nicht in jedem Fall getroffen werden kann. Erst nach über einer Millionen Jahren wird die Verzögerung durch die Halbwertszeiten der Tochterelemente so gering, dass sie vernachlässigt werden kann. Man muss jedoch bei der Einschätzung der Fehler berücksichtigen, wie groß die Abweichung durch Verluste von Helium sind, um die Glaubwürdigkeit der Helium-Altersdatierung richtig einschätzen zu können. Allgemein waren die Alter, welche durch die Helium-Altersdatierung ermittelt wurden, etwas größer als die der Uran/Thorium-Methode. Die Ergebnisse der Helium-Altersdatierung haben einen durchschnittlichen Abweichungs-Faktor von 1.5 zur Uran/Thorium-Altersdatierung.

Durch die diskrete Annäherung des Problems konnte bestätigt werden, dass die differentielle Methode den Prozess des Zerfalls gut beschreibt. Vor allem die Tatsache, dass für die Differenz der beiden Methoden sowohl positive, als auch negative Werte zu beobachten sind, lässt darauf schließen, dass die Methoden im Idealfall, also für ($\lim \Delta t \rightarrow 0$ & Rundungsfehler = 0) identisch sind.

References

- [1] Michael L Bender. Helium-uranium dating of corals. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 37(5):1229–1247, 1973.
- [2] Peter Copeland, E Bruce Watson, S Cristina Urizar, Desmond Patterson, and Thomas J Lapen. Alpha thermochronology of carbonates. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 71(18):4488–4511, 2007.
- [3] Eric Michael Durrance. Radioactivity in geology: principles and applications. pages 283–287, 1986.
- [4] FP Fanale and OA Schaeffer. Helium-uranium ratios for pleistocene and tertiary fossil aragonites. *Science*, 149(3681):312–316, 1965.

- [5] Fraser Fanale and JL Kulp. Helium in limestone and marble. *Am. Mineralogist*, 46, 1961.
- [6] KA Farley, RA Wolf, and LT Silver. The effects of long alpha-stopping distances on (u th)/he ages. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 60(21):4223–4229, 1996.
- [7] Kenneth A Farley. (u-th)/he dating: Techniques, calibrations, and applications. *Reviews in Mineralogy and Geochemistry*, 47(1):819–844, 2002.
- [8] Holleman and Wiberg. Lehrbuch der anorganischen chemie. page 1885, 2007.
- [9] M Janssen. The total solar eclipse of august 1868. part i. *Astronomical register*, 7:107–110, 1869.
- [10] NB Keevil. The helium method for determining the age of rocks. *Nature*, 148:445–446, 1941.
- [11] NB Keevil. The distribution of helium and radioactivity in rocks; v, rocks and associated minerals. *American Journal of Science*, 241(5):277–306, 1943.
- [12] T Kluge, T Marx, D Scholz, S Niggemann, A Mangini, and W Aeschbach-Hertig. A new tool for palaeoclimate reconstruction: Noble gas temperatures from fluid inclusions in speleothems. *Earth and Planetary Science Letters*, 269(3):408–415, 2008.
- [13] Tobias Kluge. Fluid inclusions in speleothems as a new archive for the noble gas palaeothermometer. 2008.
- [14] Willard F Libby and Frederick Johnson. *Radiocarbon dating*, volume 124. University of Chicago Press Chicago, 1955.
- [15] Michael C Meyer, Robert A Cliff, and Christoph Spötl. Speleothems and mountain uplift. *Geology*, 39(5):447–450, 2011.
- [16] Sara Gran Mitchell and Peter W Reiners. Influence of wildfires on apatite and zircon (u-th)/he ages. *Geology*, 31(12):1025–1028, 2003.
- [17] Janiak Riedel. Anorganische chemie. page 391, 2007.
- [18] Rutherford. The production of helium from radium and the transformation of matter. 10:180–194, 1906.
- [19] Robert C Weast, Melvin J Astle, and William H Beyer. *CRC handbook of chemistry and physics*, volume 69. CRC press Boca Raton, FL, 1988.

Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die mich bei meiner Arbeit unterstützt haben, insbesondere bei Dr. Tobias Kluge, für seine Hilfsbereitschaft und seine kreativen Ideen.

7 Anhang

7.1 Alternative Rechnung

Am Beginn meiner Bachelorarbeit habe ich mit anderen Gleichungen zur Bestimmung der Helium-Menge bei gegebener Zeit gerechnet. Und demzufolge auch mit einer anderen Gleichung für das Alter. Die Rechnungen stimmen nicht ganz mit den oben vorgestellten überein. Die Rechnungen und die Gründe für die Abweichungen werden im Folgenden kurz erklärt. Die Stoffmengen in Abhängigkeit von der Zeit wurden wie folgt berechnet:

$$N_0(t) = N_{0,0}e^{-\lambda_0 t}$$

$$N_1(t) = (N_{0,1} + (N_{0,0} - N_0(t)))e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2 = (N_{0,2} + (N_{0,1} + N_{0,0} - N_0(t) - N_1(t)))e^{-\lambda_2 t}$$

mit

$$N_{0,1} + (N_{0,0} - N_0(t)) =: N_{g,1}(t)$$

$$\Rightarrow N_{g,n}(t) = \sum_{i=0}^n (N_{0,i} - N_{i-1}(t))$$

Daraus folgt:

$$N_n(t) = (N_{0,n} + (N_{g,n-1}(t) - N_{n-1}(t)))e^{-\lambda_n t} \quad (4)$$

Die Menge an Helium berechnet sich also aus:

Das erste Element hat folgende Helium-Menge zur Folge:

$$He_1(t) = N_{g,1}(t) - N_1(t)$$

$$\Rightarrow He_n(t) = N_{g,n}(t) - N_n(t) \quad (5)$$

$$\Rightarrow He_i = N_{g,i}(t) + He_{i-1}(t) - N_i(t)$$

mit $He_a = 0$ für $a < 1$

Das ist identisch zu:

$$\Rightarrow He = \sum_{i=1, \text{alphastrahler}}^m (N_{g,i}(t) - N_i(t))$$

Die Anfangsmengen $N_{0,i}$ wurden berechnet durch:

$$N_{0,i} = N_{measured} e^{\lambda_i t} - H e_{i-1}$$

Die Gleichung für das Alter lautet also:

He=

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1, \text{alphastrahler}}^m i(N_{measured_{m+1-i}} e^{\lambda_{m+1-i} t} \\ & - H e_{m-i} - N_{m+1-i}) \tag{6} \\ = & \sum_{i=1, \text{alphastrahler}}^m i(N_{measured_{m+1-i}} e^{\lambda_{m+1-i} t} \\ & - ((N_{0,m-i} - N_{m-i}) - N_{m+1-i})) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen wurden ebenfalls in einem C++ Programm implementiert und analysiert. Bei dieser Methode konnte kein Gleichgewicht erreicht werden, unabhängig von den Anfangsbedingungen. Der Quotient aus Eltern- und Tochter-nukliden wurde niemals konstant, auch nicht zeitweise. Der Grund für dieses falsche Resultat ist, dass das kontinuierliche Wachstum der Tochter-nuklide nicht richtig berechnet wurde. Es wurde vielmehr angenommen, dass die Menge, welche von den Eltern-nuklid nach der Zeit t_0 zerfallen ist schon bei $t=0$ bei dem Tochter-nuklid angekommen ist und ab da mit $\lambda_{\text{Tochter-nuklid}}$ zerfallen ist. somit ist diese Methode der Gleichgewichtsmethode sehr ähnlich und kann nur bei sehr alten Proben angewandt werden.

Stoffmenge-Zeit Diagramm für zwei Methoden

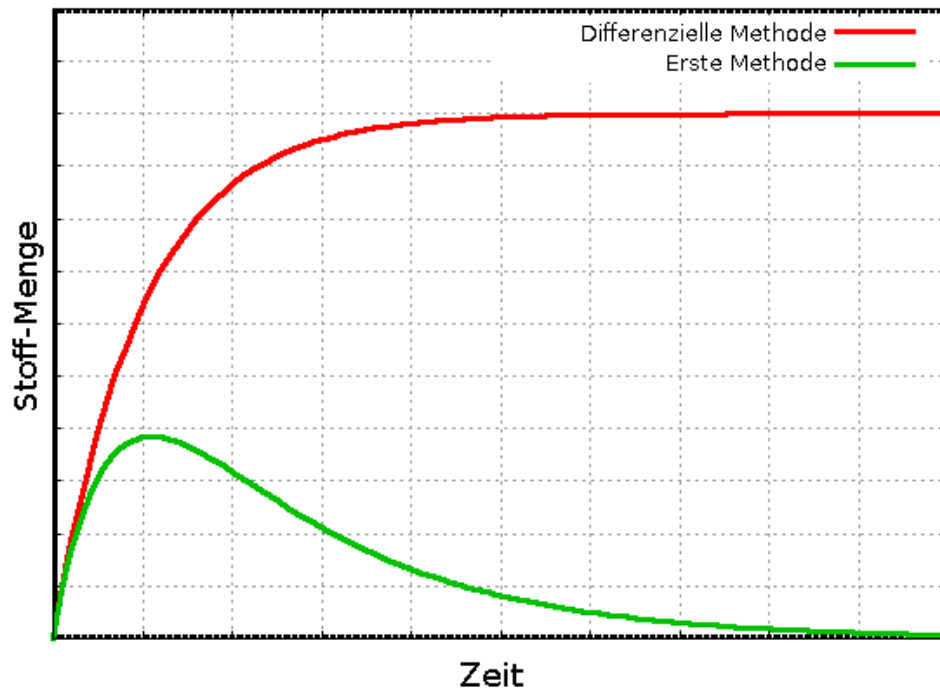


Figure 20: Es wird der Unterschied der differentiellen Methode (rot) zu der hier diskutierten Methode (grün) dargestellt. Man kann erkennen, dass das Vorkommen relativ schnell auf Null abfällt und kein konstanter Wert erreicht wird, dadurch wird eine größere Helium Menge nach kürzerer Zeit berechnet, und somit das Alter unterschätzt.

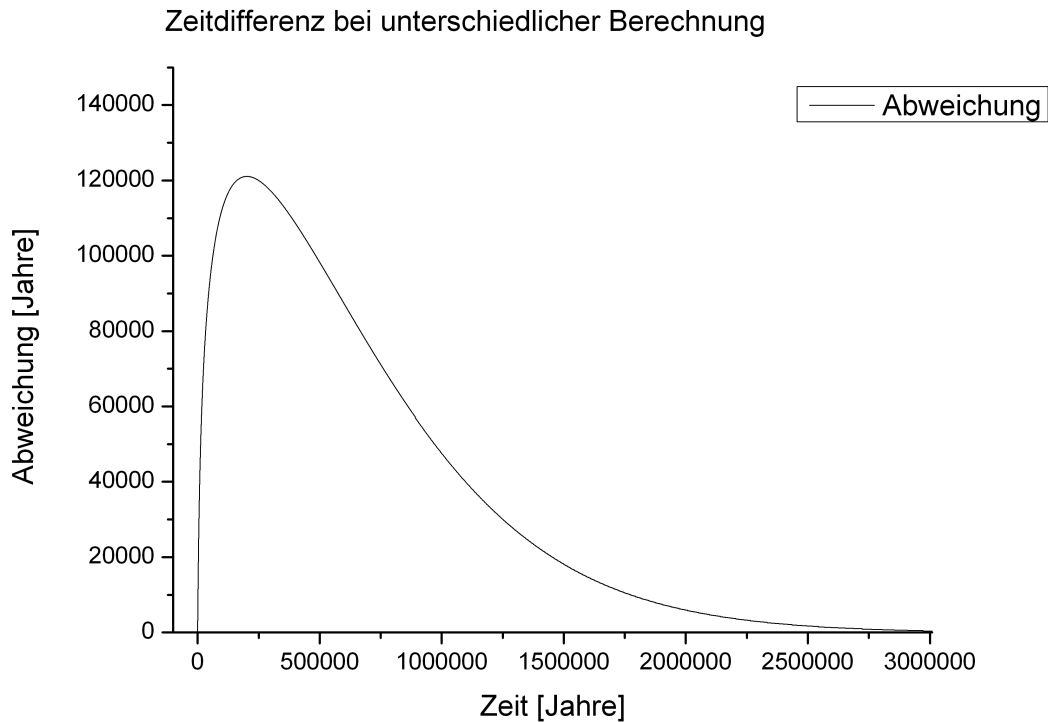


Figure 21: Es kann erkannt werden, dass die Abweichung zu der Gleichgewichtsnahme sehr viel kleiner ist (vgl. Abbildung 10) und nach relativ kurzer Zeit (bei der differentiellen Methode geschieht das erst nach über 10^{10} Jahren) gegen Null konvergiert.

7.2 Zu "Säkuläres Gleichgewicht" Analyse der relevanten Anfangsbedingungen

Der Abweichungen, welche durch die Annahme von radioaktiven Gleichgewicht entstehen, wurden abhängig von den Anfangsbedingungen, untersucht. Hierzu wurden die Anfangsbedingungen von ^{234}U variiert (vgl. Abbildung 10). Man kann erkennen, dass diese einen sehr starken Einfluss auf die tatsächlichen Abweichung haben. Vor allem die Abbildung 23 zeigt einen interessanten Verlauf, da die relativen Abweichungen bei 10^7 Jahren noch einmal ansteigen. Dies ist auf den großen Anstieg der absoluten Abweichung zurückzuführen. Der große Anstieg kommt von der Menge von ^{234}U .

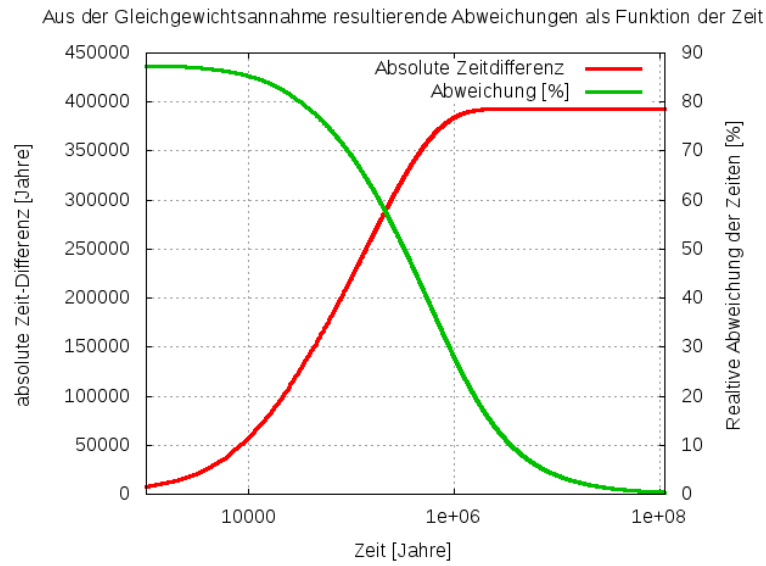


Figure 22: Es ist die Abweichung der Zeit von der Berechnung mit einer Gleichgewichtsannahme zu der differentiellen Berechnung zu sehen. Es wurden folgende Anfangsbedingungen vorausgesetzt: $^{238}\text{U}=8.9087610^{17}$, $^{232}\text{Th}=3.3410^{12}$.

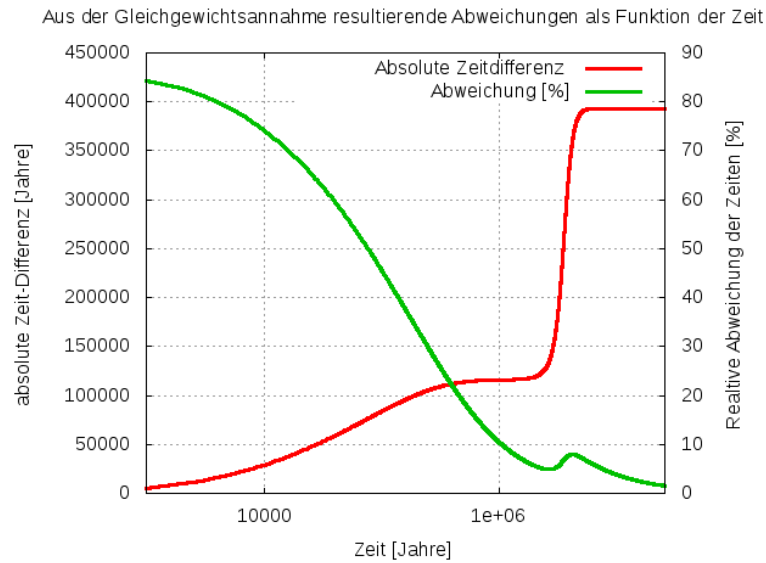


Figure 23: Es ist die Abweichung der Zeit von der Berechnung mit einer Gleichgewichtsannahme zu der differentiellen Berechnung zu sehen. Es wurden folgende Anfangsbedingungen vorausgesetzt: $^{238}\text{U}=8.90876*10^{17}$, $^{234}\text{U}=1.5*8.90876*10^{17}$, $^{232}\text{Th}=3.34*10^{12}$. Der rapide Anstieg des absoluten und auch des relativen Fehlers ist auf den zerfall von ^{234}U zurückzuführen.

7.3 Daten

Die Daten, deren Name ein BU enthält (bzw. SodaStrwII) kommen aus der Bunker Höhle im Sauerland [12]. Die Daten, deren Name ein WM enthält, kommen aus der Wildermann Höhle in Österreich [15]. Und die Daten mit "Spa" kommen aus der Spannagel Höhle im Zillertal in Österreich. Die Daten mit BCI4 kommen aus der Bearcave (Bären Höhle) in Kanada.

Datierung via Helium Calcit-Gewicht (g)

Name	Helium	err	err	
run beta	total ccstp	ccstp	[#Atome]	
Probe	Calcit-Gewicht (g)	total ccSTP		
1666_Cotube_Bu	1,0838	4,46E-11	-	
1677_Cotube_Bu2	1,0694	2,54E-10	-	
1672_Crusher_Bu1	1,0014	6,79E-10	-	
1681_Crusher_Bu3	1,0644	4,27E-10	-	
1687_Crusher_Bu4	1,4278	3,68E-10	-	
1177_BU	2,7484	5,04E-10	-	
1661_Soda	1,14	2,04E-10	-	
		total	err	
		ccSTP	ccstp	
l704_Crusher_Spa52b_heat150	1,5153	1,47E-09	2,45E-10	6587034504
1714_Crusher_Spa12_heat150	2,57	2,98E-10	1,46E-10	3933398532
2441_A_BU1_Crush	1,4243	7,22E-11	1,17E-11	313211338
2436_B_SodaStrwll_crush	0,9666	4,68E-11	2,33E-11	627021612,1
2448_C_BU2_Heat	1,452	1,20E-09	2,60E-11	697513433,8
2454_A_BUU_3_Heat	0,7755	2,37E-11	6,53E-12	175283342,8
2460_C_BUU_5_Heat	0,5874	4,64E-11	1,03E-11	277159683,5
2473_BUU_6_crush	0,795	2,80E-10	1,92E-11	515410008,6
2478_C_BUU_12_heat	0,6191	1,11E-09	5,27E-11	1416319985
2483_B_BUU_14_heat	0,7265	1,26E-09	4,66E-11	1250261601
2489_C_BUU_15_heat	0,3971	6,22E-10	4,99E-11	1340837925
2494_B_BUU_2_heat	1,4007	6,59E-11	8,04E-12	216015830,4
2500_C_BUU_9_heat	1,331	8,18E-10	7,41E-11	1988854529
205_A_BUU4_160hits	1,750	1,14E-10	3,48E-11	933773572,2
211_C_BUU11_160hits	1,134	1,07E-09	9,48E-11	2547030722
216_B_BUU10_160hits	1,123	2,17E-09	1,33E-10	3577609016
233_C_BUU8_heat150	0,621	1,32E-09	1,22E-10	3289770544
250_B_BUU13_heat	0,580	2,44E-09	1,18E-10	3166035186
259_A_BU1_55_heat	1,151	9,62E-10	9,18E-11	2465263862
270_BU1_22_heat	0,690	6,05E-10	1,05E-10	2829314935
275_BU1_29_heat	0,561	3,21E-10	5,69E-11	1528970998
309_C_BU1_46_heat	0,514	3,25E-10	1,16E-10	3120456956
313_C_BU1_49_heat	1,0117	1,09E-10	2,64E-11	709543185,8
319_A_BU1_51_heat	0,8848	3,00E-10	6,29E-11	1689279059
323_C_WM1_heat	0,419	3,16E-09	1,04E-09	27993681314
328_B_BCI4_heat	0,8942	7,83E-08	1,30E-08	3,5041E+011

Sheet1

Helium [#Atome]	Gehalt U238 [ppm]	Gehalt U238 [#Atome]	Gehalt Th-232 [ng/g]	Gehalt Th-232 [#Atome]
1,20E+09	108,8	2,9836E+014	0,5	1,41E+12
6,82E+09	108,8	2,9440E+014	0,5	1,39E+12
1,82E+10	108,8	2,7568E+014	0,5	1,30E+12
1,15E+10	108,8	2,9302E+014	0,5	1,38E+12
9,87E+09	108,8	3,9306E+014	0,5	1,85E+12
1,35E+10	108,8	7,5661E+014	0,5	3,57E+12
5,49E+09	108,8	3,1383E+014	0,5	1,48E+12

U-238 (ppm)

3,94E+10	3	1,1502E+016	0,5	1,97E+12
8,00E+09	13,7	8,9088E+016	0,5	3,34E+12
1,94E+09	0,045	1,6217E+014	0,5	1,85E+12
1,26E+09	0,05	1,2229E+014	0,5	1,25E+12
3,23E+10	0,068	2,4983E+014	0,5	1,88E+12
6,36E+08	0,125	2,4528E+014	0,5	1,01E+12
1,25E+09	0,13	1,9322E+014	0,5	7,62E+11
7,51E+09	0,13	2,6150E+014	0,5	1,03E+12
2,99E+10	0,136	2,1304E+014	0,5	8,03E+11
3,39E+10	0,186	3,4191E+014	0,5	9,43E+11
1,67E+10	0,186	1,8689E+014	0,5	5,15E+11
1,77E+09	0,123	4,3593E+014	0,5	1,82E+12
2,20E+10	0,144	4,8496E+014	0,5	1,73E+12
3,06E+09	0,13	5,7570E+014	0,5	2,27E+12
2,89E+10	0,136	3,9016E+014	0,5	1,47E+12
5,83E+10	0,143	4,0644E+014	0,5	1,46E+12
3,54E+10	0,134	2,1055E+014	0,5	8,06E+11
6,54E+10	0,186	2,7273E+014	0,5	7,52E+11
2,58E+10	0,149	4,3378E+014	0,5	1,49E+12
1,63E+10	0,0589	1,0286E+014	0,5	8,96E+11
8,61E+09	0,0615	8,7329E+013	0,5	7,28E+11
8,73E+09	0,1	1,2995E+014	0,5	6,67E+11
2,93E+09	0,1188	3,0411E+014	0,5	1,31E+12
8,06E+09	0,1188	2,6597E+014	0,5	1,15E+12
8,48E+10	3	3,1805E+015	0,5	5,44E+11
2,10E+12	0,2215	5,0116E+014	0,5	1,16E+12

U-Th Alter
[a]

10800-16500
10800-16499
10800-16498
10800-16497
10800-16496
10800-16495
10800-16494

U-Th Alter
[ka]

-
-
-
-
51
11
11,5
-
128
130
132
10,8
54
10-12
10-12
10-12
54
129
8,5
5
5
7,5
8
8
2200
2000-5000

7.4 Implementierung der Differentiellen Methode

$$N_n(t) :$$

Funktion, die die Stoffmenge des n-ten Elementes der Zerfallsreihe i berechnet.

```
1 long double Nn(double time, int n, int i){
2     double p = 0;
3     for (int l=0;l<=n;l++){
4         for (int j=1;j<=n;j++){
5             p+=Cx(time, n, l, j, i) exp(-element[j][0][i]
6                 time);
7         }
8     }
9     return p;
```

$$N_{n0}$$

Modifiziertes $N_n(t)$ um N_0 zu berechnen.

```
1
2 long double Nn0(double time, int n, int i){
3     double p = 0;
4     for (int l=0;l<n;l++){
5         for (int j=1;j<=n;j++){
6             p+=Cx(time, n, l, j, i) exp(-element[j][0][i] time)
7                 ;
8         }
9     }
10    return p;
```

$$C_x$$

Index zu Berechnung von N_n .

```
1
2 long double Cx(double time, int n, int m, int x, int i){
3     long double p=N0(time, m, i);
4     for (int k=m;k<=n;k++){
5         if(k!=x){
6             p=p/(element[k][0][i]-element[x][0][i]);
7         }
8     }
9     for (int j=m;j<n;j++){
10        p=p element[j][0][i];
```

```

11     }
12     if isinf(p){
13         cout <<"Achtung zu gro\ss{}e Zahlen werden
            berechnet. Der Vorfaktor kann nicht mehr
            berechnet werden und wird auf 0 gesetzt , daraus
            k\''onnen gro\ss{}e Fehler entstehen." <<endl;
14         return 0;
15     }
16     return p;
17 }

```

N_0

Anfangsmenge bei gegebenen Messungen.

```

1
2 long double N0(double time, int n, int i){
3     long double p=element [0][4][ i ] exp(element [0][0][ i ]
4         time);
5         if (n>0){
6             if (element [n][0][ i ] time>709){
7                 p = 0;
8             }
9             else if (element [n][4][ i]==0){
10                p = 0;
11            }
12            else{
13                p=(element [n][4][ i]-Nn0(time , n, i)) exp(
14                    element [n][0][ i ] time);
15            }
16        }
17        if(p<0){
18            cout <<"Gemessener Wert ist zu klein , Es wird
19                eine Anfangsmenge von 0 angenommen"<<endl;
20            return 0;
21        }
22    return p;
23 }

```

$He(t)$

Menge von Helium in Abhängigkeit von der Zeit

```

1
2 long double He (double t){
3     long double p=0;
4     int h=0;
5     for (int i=0;i<3;i++){
6         h=0;
7         while (h<=14){
8             if(element[h][1][i]==1){//um nur die alpha
                strahler rauszusuchen
9                 for (int l=0;l<=h;l++){
10                    p= p+N0(t,l,i)-Nn(t,l,i);
11                }
12            }
13            h++;
14        }
15    }
16    return p;
17 }

```

GetAge

Newton Methode um das Alter zu berechnen (Quelle: Numerik 0 Sommersemester 2013 Heidelberg), die Funktion aHe(t) ist die Ableitung zu He(t) diese Funktion konvergiert nicht immer, deshalb wurde nicht GetAge1(HA,t) implementiert.

```

1
2 double GetAge(double HA, double t){
3     int i=0;
4     while (abs(He(t)-HA) > 0.000000000000001){
5         if (i>305){
6             t=GetAge1(HA, t);
7         }
8         else if (aHe(t)==0){
9             cout<< "ableitung war Null"<< endl;
10            t=GetAge1(HA, t);
11        }
12        else{
13            t=t-(He(t)-HA)/aHe(t);
14        }
15        if (t<0){
16            t=GetAge1(HA, 1);
17        }

```

```

18         i++;
19     }
20     return t;
21 }

```

GetAge1(HA, t)

```

1
2 double GetAge1(double HA, double t){
3     long double p;
4     long double f;
5     while (He(t)-HA<0.000000000000001){
6         while (He(t)-HA<0){
7             t=2 t;
8             q << t << endl;
9             p=t;
10            q << p << endl;
11            f=t/2;
12            q << f << endl;
13        }
14        while (He(p)>HA+0.000000000000001){
15            if (He((p+f)/2)-HA>0){
16                p=(p+f)/2;
17            }
18            else if (He((p+f)/2)-HA<0){
19                f=(p+f)/2;
20            }
21            else if (He((p+f)/2)-HA==0){
22                q << (p+f)/2 << endl;
23                return (p+f)/2;
24            }
25            if (abs(p-f)<=1E-12){
26                return p;
27            }
28
29            t=p;
30        }
31    }
32    while (He(t)-HA>0.000000000000001){
33        while (He(t)-HA>0){
34            t=t/2;

```

```

35         p=2 t ;
36         f=t ;
37     }
38     while (He(p)>HA+0.000000000000001) {
39         if (He((p+f)/2)-HA>0){
40             p=(p+f)/2;
41         }
42         else if (He((p+f)/2)-HA<0){
43             f=(p+f)/2;
44         }
45         else if (He((p+f)/2)-HA==0){
46             return (p+f)/2;
47         }
48         if (abs(p-f)<=1E-3){
49             return p;
50         }
51     }
52     t=p;
53 }
54 return t;
55 }
56 }

```

7.5 Analyse der Diskreten Methode im Vergleich zu der Differentiellen

7.5.1 Abweichungen der Helium-Mengen bei verschiedenen Zeitintervallen

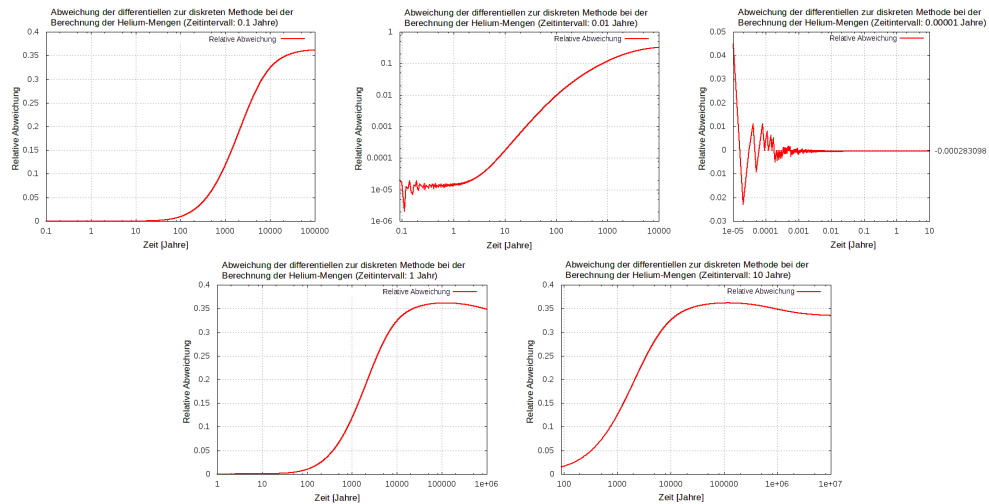


Figure 24: Analyse der diskreten Methode: Unterschiede der differentiellen- zu der diskreten Methode bei der Berechnung der Helium-Mengen. Es wurde jeweils der Zeitschritt geändert.

7.5.2 Abweichungen der Alter bei verschiedenen Zeitintervallen

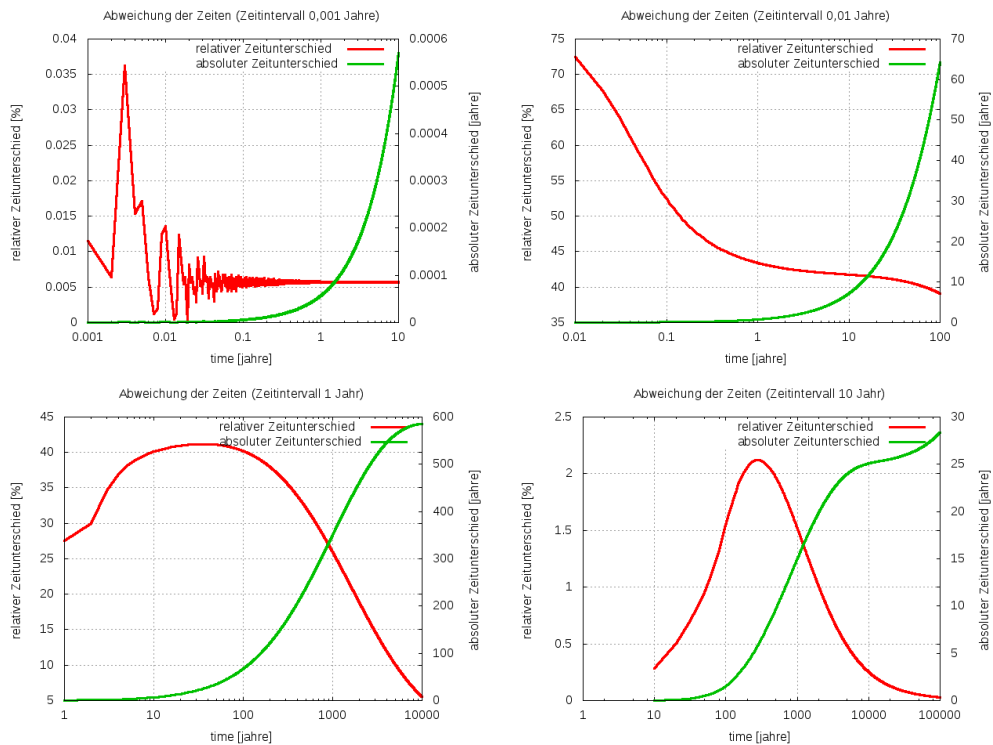


Figure 25: Es ist die Abweichung der Heliummenge bei verschiedenen Zeiten zu sehen. Bei einem Zeitintervall von 0.00001 Jahren ist zu erkennen, dass bei kleinen Zeiten die Helium-Menge um die, durch die differentiell ermittelten Mengen schwankt. Das ist ein deutlicher Hinweis darauf, dass die diskrete Methode tatsächlich gegen die differentielle Methode konvergiert. Bei der diskreten Methode müssen erst mindestens n Rechenschritte durchgeführt werden um ein glaubwürdiges Ergebnis zu erhalten, wobei n die Anzahl der Elemente in der Zerfallskette bezeichnet. Dies lässt sich dadurch begründen, dass vorher die Zerfallskomponenten noch nicht bis ins letzte Element vorgedrungen ist.

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 08.08.2014,